Décision multicritère

Theorie du mesurage

Nicolas Fayard

September 24, 2024

Programme

Introduction

Comment choisir un séjour pour les vacances ?

Considérer l'achat d'un séjour pour les vacances.
Ils ont différentes caractéristiques: coûts, confort de l'hôtel, distance de la plage, intérêt culturel...
Afin de choisir parmi des séjours, nous devons les comparer en fonction de plusieurs dimensions et identifier les "meilleurs".

Quel est le problème

- *Problématique du choix* ;
- *Problematique du rangement* ;
- *Problematique de classification*.

Introduction

Quel est le problème

- *Problématique du choix* ;
- *Problematique du rangement* ;
- *Problematique de classification*.

Que signifie “meilleur” ?

- Meilleur pour qui ?
- Comment mesurer ce qui est meilleur sur le plan de l’intérêt culturel ?
- Comment comparer ce qui est meilleur sur le plan de l’intérêt culturel avec ce qui est meilleur sur le plan des coûts ?

Introduction

Séjour	Coûts	Confort de l'hôtel	Distance de la plage	Intérêt culturel
a	100	**	20min	-
b	120	***	10min	- -
c	90	***	15min	++
d	150	****	10min	++

Table: Comparaison de quelques séjours.

Critere de Pareto

Pareto dominance

Soit ensemble d'alternatives A.
Chaque alternative $a \in A$ à n dimensions, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Une alternative $a \in A$ **Pareto domine** $b \in A$ si:

$$\forall i, a_i \geq_i b_i \text{ et } \exists j, a_j >_j b_j.$$

Avec $a_i \geq_i b_i$ signifiant que a est "au moins aussi bien" que b sur le critère i.
Et $a_i >_i b_i$ signifiant que a est "preferé" que b sur le critère i.

Critere de Pareto

Séjour	Coûts	Confort de l'hôtel	Distance de la plage	Intérêt culturel
a	100	**	20min	-
b	120	***	10min	- -
c	90	***	15min	++
d	150	****	10min	++

Table: Comparaison de quelques séjours.

Critere de Pareto

Séjour	Coûts	Confort de l'hôtel	Distance de la plage	Intérêt culturel
a	100	**	20min	-
b	120	***	10min	- -
c	90	***	15min	++
d	150	****	10min	++

Table: Comparaison de quelques séjours.

c est préféré a parce que "meilleur" sur toute les critères (e.i. moins chere, plus confortable, plus pres de la plage et avec plus d'interet culturel)

Critere de Pareto

Pareto efficacité

Soit ensemble d'alternatives A.
Chaque alternative $a \in A$ a n critere, $(a_1, a_2, ..., a_n)$.
Une alternative a est **Pareto efficace** si:

$$\nexists b \in A \text{ tel que } b_i \geq_i a_i \forall i \text{ et } b_j >_j a_j \text{ pour au moins un } j.$$

Critere de Pareto

Promotion exceptionel sur d! Il est a moins 40%

Séjour	Coûts	Confort de l'hôtel	Distance de la plage	Intérêt culturel
a	100	**	20min	-
b	120	***	10min	- -
c	90	***	15min	$++$
d	**90**	****	10min	$++$

Table: Comparaison de quelques séjours.

d est Pareto efficace.

Critere de Pareto

Avantage

- Si une solution Pareto efficace unique existe, il est facile de comprendre que c'est la meilleur solution.
- Nous avons besoin de très peut d'information sur les préférence du décideur. Seulement une relation de préférence sur les différents critères.

Souvant irrealiste:

- Une solution Pareto efficace unique n'existe souvent pas.
- Il est très peux probable d'obtenir un rangement complet.

Critere de Pareto

Impossibilité de comparer a et b

Séjour	Coûts	Confort de l'hôtel	Distance de la plage	Intérêt culturel
a	99	**	20min	-
b	100	****	10min	++

Pourtant, dans l'extreme majorité des cas, b sera préféré à a.

D'autre méthodes doivent être utilisées dans le cas ou le critère de Pareto n'est pas suffisant pour discriminer des options.

Utilisation de l'Ordre Lexicographique

Ordre Lexicographique:

1. Établissez une hiérarchie des critères selon leur importance.
2. Comparez les alternatives en fonction du critère le plus important.
3. En cas d'égalité, passez au critère suivant dans la hiérarchie.
4. Continuez jusqu'à ce qu'une différence soit trouvée ou que tous les critères aient été comparés.
5. Si toutes les composantes sont égales, les alternatives sont considérées comme équivalentes.

Ordre Lexicographique:

Séjour	Coûts	Confort de l'hôtel	Distance de la plage	Intérêt culturel
a	50	**	10min	++
b	120	***	15min	- -
c	90	***	15min	++
d	150	****	20min	++

Table: Comparaison de quelques séjours.

Ordre d'importance des critères: Confort de l'hôtel $\succ$ Distance de la plage $\succ$ Intérêt culturel $\succ$ Coûts

Ordre Lexicographique:

Séjour	Coûts	Confort de l'hôtel	Distance de la plage	Intérêt culturel
a	50	**	10min	++
b	120	***	15min	- -
c	90	***	15min	++
d	150	****	20min	++

Table: Comparaison de quelques séjours.

Ordre d'importance des critères: Confort de l'hôtel $\succ$ Distance de la plage $\succ$ Intérêt culturel $\succ$ Coûts

Solution: $d \succ c \succ b \succ a$

Ordre Lexicographique

Avantage

- Fonctionne sur des critères ordinal.
- Simplicité et facilité de compréhension.
- Pas de compensation entre critères : peut-être utile dans certain cas

Inconvenant

- Risque d'ignorer des Informations : Les critères moins importants sont souvent négligés
- Non-compensation Stricte : L'absence de compensation peut être aussi un inconvénient
  Ex: Avec Coût en critère le plus important: $a > b$

Séjour	Coûts	Confort de l'hôtel	Distance de la plage	Intérêt culturel
a	99	**	20min	-
b	100	****	10min	++

Moyenne pondérée

Pour une raison de simplicité on suppose ici que $A = \mathbb{R}^n$.

La moyenne pondérée.

La moyenne pondérée correspond au cas dans lequel il existe $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^+$ avec $\sum_i w_i = 1$ tels que

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i.$$

- C'est une formule très simple qui permet de prendre en compte que les différents critères n'ont pas la même importance.
- Par contre, cet opérateur ne permet pas de favoriser des solutions équilibrées.

Moyenne géométrique

Pour une raison de simplicité on suppose ici que $A = [0;1]^n$.

La moyenne géométrique.

La moyenne géométrique correspond au cas où

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

- Cet opérateur permet de favoriser des solutions équilibrées.
- C'est une formule plus complexe et est plus compliqué d'incorporer des pondérations, car les poids affectent exponentiellement les critères.

Moyenne géométrique

On suppose ici que $A = \mathbb{R}^n$.

La moyenne géométrique Pondérée.

La moyenne géométrique pondérée où il existe $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^+$ correspond au cas où

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}}$$

Exemple

$a = (2, 3, 5)$ et $w = (1, 2, 2)$:

Moyenne géométrique

On suppose ici que $A = \mathbb{R}^n$.

La moyenne géométrique Pondérée.

La moyenne géométrique pondérée où il existe $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^+$ correspond au cas où

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}}$$

Exemple

$a = (2, 3, 5)$ et $w = (1, 2, 2)$:

$$f(a) = (2^1 \times 3^2 \times 5^2)^{\frac{1}{1+2+2}} = (2 \times 9 \times 25)^{\frac{1}{5}} = (450^{\frac{1}{5}}) \approx 3.39$$

Les moyennes pondérées ordonnées

Pour une raison de simplicité on suppose ici que $A = \mathbb{R}^n$.

Pour $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$, soit r_a la permutation de $\{1, \ldots, n\}$ telle que

$$a_{r_a(1)} \leq a_{r_a(2)} \leq \ldots \leq a_{r_a(n)}.$$

La valeur $a_{r_a(i)}$ est la valeur de rang i dans a.

Les moyennes pondérées ordonnées.

La moyenne pondérée ordonnée correspond au cas dans lequel il existe $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^+$ avec $\sum_i w_i = 1$ tels que

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_{r_a(i)}.$$

- Les poids ne sont pas attachées aux critères mais aux rangs.

Exemple

Alternative	C1	C2	C3
a	0.5	0.5	0.5
b	0.1	1	0.1
c	0.7	0.7	0.3

Table: Critères des alternatives

1. Moyennes pondérées avec $w_1 = 0.4; w_2 = w_3 = 0.3$,

Exemple

Alternative	C1	C2	C3
a	0.5	0.5	0.5
b	0.1	1	0.1
c	0.7	0.7	0.3

Table: Critères des alternatives

1. Moyennes pondérées avec $w_1 = 0.4; w_2 = w_3 = 0.3$, on obtiens $a = 0.37; b = 0.46; c = 0.52$.

Exemple

Alternative	C1	C2	C3
a	0.5	0.5	0.5
b	0.1	1	0.1
c	0.7	0.7	0.3

Table: Critères des alternatives

1. Moyennes pondérées avec $w_1 = 0.4; w_2 = w_3 = 0.3$, on obtiens $a = 0.37; b = 0.46; c = 0.52$.
2. Moyennes géométrique, on obtiens,

Exemple

Alternative	**C1**	**C2**	**C3**
a	0.5	0.5	0.5
b	0.1	1	0.1
c	0.7	0.7	0.3

Table: Critères des alternatives

1. Moyennes pondérées avec $w_1 = 0.4; w_2 = w_3 = 0.3$, on obtiens $a = 0.37; b = 0.46; c = 0.52$.
2. Moyennes géométrique, on obtiens, $a = 0.5; b = 0.215; c = 0.365$

Exemple

Alternative	C1	C2	C3
a	0.5	0.5	0.5
b	0.1	1	0.1
c	0.7	0.7	0.3

Table: Critères des alternatives

1. Moyennes pondérées avec $w_1 = 0.4; w_2 = w_3 = 0.3$, on obtiens $a = 0.37; b = 0.46; c = 0.52$.
2. Moyennes géométrique, on obtiens, $a = 0.5; b = 0.215; c = 0.365$
3. Moyennes pondérées ordonné avec $w_1 = 0.8,\ w_2 = 0.1,\ w_3 = 0.1$,

Exemple

Alternative	C1	C2	C3
a	0.5	0.5	0.5
b	0.1	1	0.1
c	0.7	0.7	0.3

Table: Critères des alternatives

1. Moyennes pondérées avec $w_1 = 0.4; w_2 = w_3 = 0.3$,
   on obtiens $a = 0.37; b = 0.46; c = 0.52$.
2. Moyennes géométrique, on obtiens,
   $a = 0.5; b = 0.215; c = 0.365$
3. Moyennes pondérées ordonné avec $w_1 = 0.8,\ w_2 = 0.1,\ w_3 = 0.1$,
   on obtiens $a = 0.5; b = 0.82; c = 0.64$.

Introduction à TOPSIS

TOPSIS - Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution

TOPSIS est une méthode de prise de décision multicritère qui évalue et classe des alternatives en se basant sur leur proximité à la solution idéale.

Choix d'un Projet Environnemental

Objectif : Sélectionner le projet environnemental le plus efficace parmi quatre options.
Critères : Impact environnemental, Coût, Participation communautaire, Durabilité.

Projet	IE	C	PC	D
P1	80	100	60	70
P2	70	80	80	60
P3	60	90	70	80
P4	90	110	50	75

Étape 1 : Normalisation des Données

Transformation des Données

Les données des critères pour chaque projet sont normalisées pour permettre la comparabilité, on choisis;

$$r_{j,i} = \frac{a_{j,i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_{j,i}^2}}$$

Données Normalisées

Projet	IE	C	PC	D
P1	0.53	0.52	0.45	0.49
P2	0.46	0.42	0.60	0.42
P3	0.40	0.47	0.53	0.56
P4	0.59	0.57	0.38	0.52

Étape 2 : Poids des Critères

Attribution des Poids

Des poids sont attribués à chaque critère selon leur importance relative.

$$v_{j,i} = w_i \times r_{j,i}$$

Attribution des Poids aux Critères

Poids attribués : IE = 0.3, C = 0.2, PC = 0.2, D = 0.3.

Projet	IE (Poids: 0.3)	C (Poids: 0.2)	PC (Poids: 0.2)	D (Poids: 0.3)
P1	0.159	0.104	0.090	0.147
P2	0.138	0.084	0.120	0.126
P3	0.120	0.094	0.106	0.168
P4	0.177	0.114	0.076	0.156

Étape 3 : Solutions Idéales Positive et Négative

Identification des Solutions Idéales

Déterminer la solution idéale positive A^{+} (meilleures valeurs pour chaque critère) et la solution idéale négative A^{-} (pires valeurs pour chaque critère).

Détermination des Solutions Idéales

Projet	IE (Poids: 0.3)	C (Poids: 0.2)	PC (Poids: 0.2)	D (Poids: 0.3)
P1	0.159	0.104	0.090	0.147
P2	0.138	0.084	0.120	0.126
P3	0.120	0.094	0.106	0.168
P4	0.177	0.114	0.076	0.156
A^{+}	0.177	0.84	0.120	0.168
A^{-}	0.120	0.114	0.076	0.126

Étape 4 : Calcul des Distances

Distance aux Solutions Idéales

Calculer la distance de chaque alternative à aux solution idéales positive et négative.

$$A_j^{-,+} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_{j,i} - A_i^{-,+})^2}$$

Distance aux Solutions Idéales

Projet	IE (Poids: 0.3)	C (Poids: 0.2)	PC (Poids: 0.2)	D (Poids: 0.3)	A_j^+	A_j^-
P1	0.159	0.104	0.090	0.147	0.737	0.047
P2	0.138	0.084	0.120	0.126	0.758	0.056
P3	0.120	0.094	0.106	0.168	0.748	0.055
P4	0.177	0.114	0.076	0.156	0.727	0.064
A^+	0.177	0.84	0.120	0.168		
A^-	0.120	0.114	0.076	0.126		

Étape 5 : Classement des Alternatives

Score de Similarité et Classement

Attribuer un score de similarité à chaque projet et les classer en fonction de leur score.

$$S(a_j) = \frac{A_j^-}{(A_j^- + A_j^+)}$$

Score de Similarité et Classement

Projet	IE	C	PC	D	A_j^+	A_j^-	S(a_j)
P1	0.159	0.104	0.090	0.147	0.737	0.047	0.059
P2	0.138	0.084	0.120	0.126	0.758	0.056	0.068
P3	0.120	0.094	0.106	0.168	0.748	0.055	0.068
P4	0.177	0.114	0.076	0.156	0.727	0.064	0.080
A^+	0.177	0.84	0.120	0.168			
A^-	0.120	0.114	0.076	0.126			

Intuition

Somme pondéré

$$x \geq y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i \geq \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot y_i$$

Additive value function model

$$x \geq y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$$

x, y : Alternatives

$$x = (x_1, x_2, \cdots x_n), y = (y_1, y_2, \cdots y_n)$$

x_i : "Évaluation" de l'alternative x sur l'attribut i

$u_i(x_i)$: Un nombre

$$u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$$

Utilité Additive

	a	b	w_j
Bénéfice (euros)	60 000	48 000	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée			

- Pas de Pareto-dominance !

Utilité Additive

	a	b	w_j
Bénéfice (euros)	60 000	48 000	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	36 024	28 828	

- Pas de Pareto-dominance !

Utilité Additive

	a	b	w_j
Bénéfice (euros)	60 000	48 000	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	36 024	28 828	

- Pas de Pareto-dominance !
- Normalisation.

Utilité Additive

	a	b	w_j
Bénéfice (euros)	60	48	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	60	56,8	

- Pas de Pareto-dominance !
- Normalisation de bénéfice : diviser par 1000.

Utilité Additive

	a	b	w_j
Bénéfice (euros)	30	24	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	42	42,4	

- Pas de Pareto-dominance !
- Normalisation de bénéfice : diviser par 2000.

Utilité Additive

	a	b	w_j
Bénéfice (euros)	30	24	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	42	42,4	

- Pas de Pareto-dominance !
- Normalisation de bénéfice : diviser par 2000.
- Compensation $\Longrightarrow$ poids: taux de substitution : 2000 euros de bénéfice est équivalent à 1,5 (0.6/0.4) gain de minutes

Utilité Additive

	a	b	w_j
Bénéfice (euros)	30	24	0.6
Gain de temps (mn)	60	70	0.4
Somme pondérée	42	42,4	

- Pas de Pareto-dominance !
- Normalisation de bénéfice : diviser par 2000.
- Compensation $\Longrightarrow$ poids: taux de substitution : 2000 euros de bénéfice est équivalent à 1,5 (0.6/0.4) gain de minutes
- Compensation linéaire : 2000 euros d'augmentation de bénéfice est équivalent à 1,5 gain de minutes meme si notre bénéfice de départ est 2000 ou 2 000 000 !
- Que faire avec des données qualitatives ?

Normalisation linéaire ?

Situation 1:

- Vous gagnez 1150 par mois, votre travail est à 20min de chez vous ;
- On vous propose un travail qui est à 1 heure de chez vous : **à partir de quel salaire acceptez-vous ce nouveau poste ?**

Situation 2:

- Vos talents ont enfin été reconnus, vous gagnez 5000 par mois, votre travail est à 20 minutes de chez vous ;
- On vous propose un travail qui est à 1 heure de chez vous : **à partir de quel salaire acceptez-vous ce nouveau poste ?**

Normalisation

Normalisation : on peut changer d'échelle de maniére affine pour avoir des utilités entre 0 et 1 sur chaque critère.

- De maniére relative : $u_j(a) = \frac{g_j(a) - \min_{x \in A}(g_j(x))}{\max_{x \in A}(g_j(x)) - \min_{x \in A}(g_j(x))}$
- De maniére absolue : soient m et M deux valeurs (anti-idéale et idéale) telles que $m \leq u_i(a) \leq M$: $u_j(a) = \frac{g_j(a) - m}{M - m}$.

Difficultés :

- Maniére relative : probléme d'indépendance.
- Maniére absolue : comment définir les points ideaux/anti-idéaux ?
- Normalisation $\leftrightarrow$ changement des poids.

Normalisation relative

alternatives	d_1	d_2	u'_1	u'_2	Score	Rank
h	2000	700	100.00	100.00	100.0	1
a	160	435	8.00	62.14	35.07	8
b	400	370	20.00	52.86	36.43	7
c	640	305	32.00	43.57	37.79	6
d	880	240	44.00	34.29	39.14	5
e	1120	175	56.00	25.00	40.50	4
f	1360	110	68.00	15.71	41.86	3
g	1600	45	80.00	6.43	43.21	2

Table: Somme pondéré

Normalisation relative

alternatives	d_1	d_2	u'_1	u'_2	Score	Rank
h	2000	**500**	100.00	100.00	100.0	1
a	160	435	8.00	87.00	47.5	**2**
b	400	370	20.00	74.00	47.0	**3**
c	640	305	32.00	61.00	46.5	**4**
d	880	240	44.00	48.00	46.0	**5**
e	1120	175	56.00	35.00	45.5	**6**
f	1360	110	68.00	22.00	45.0	**7**
g	1600	45	80.00	9.00	44.5	**8**

Table: Somme pondéré

Poids et normalisation

- Changer la performance de h inverse le classement de toutes les autres alternatives !
- Les poids dans une somme pondérée sont des constantes d'échelle. Ils **n'indiquent pas une importance intrinsèque**. Ils sont liés à la largeur de l'échelle. Changer la largeur nécessite de changer les poids.
- Si un attribut a un "poids" élevé mais si il n'utilise qu'une petite partie de l'échelle possible l'effet est de réduire l'impact de ce critère.

- Soit $x, y, z..$ sont des alternatives concurrents dans l'ensemble A;
- Soit $d_j(x)$ représentant les attributs de x sur la dimension d_j;
- $d_j(A)$ représente l'ensemble des attributs de tout l'ensemble des alternatives. La première étape consiste à vérifier que :

$$\forall j \in D \exists \geq_j \subseteq d_j(A)^2$$

tel que j est un ordre faible (les attribus doivent être complètement et transitivement ordonnées).

Multi-attribute value model - Formalisation.

Si l'hypothèse précédente est vérifiée alors:

$$\forall j \in D \;\; \exists h_j : A \rightarrow \mathbb{R} : d_j(x) \geq d_j(y) \Leftrightarrow h_j(x) \geq h_j(y)$$

En d'autres termes pour chaque dimension nous pouvons établir une fonction à valeur réelle respectant les préférences du décideur.

Cette fonction est UNIQUEMENT une mesure ordinale des préférences.

Example

Supposons que vous ayez 4 projets x, y, z, w de réhabilitation urbaine et un attribut appelé “esthétique”.
Vous avez :
- $d_e(x)$ = statue ;
- $d_e(y)$ = fontaine ;
- $d_e(z)$ = jardin ;
- $d_e(w)$ = espace pour les enfants ;

Les préférences exprimées pourraient être par exemple :

$$d_e(x) \succ d_e(y) \succ d_e(z) \sim d_e(w)$$

Une représentation numérique possible pourrait donc être :

$$h_e(x) = 3, h_e(y) = 2, h_e(z) = h_e(w) = 1$$

Example

Supposons que vous ayez 4 projets x, y, z, w de réhabilitation urbaine et un attribut appelé "utilisation des sols".

Vous avez :

- $d_l(x) = 100m^2$;
- $d_l(y) = 50m^2$;
- $d_l(z) = 1000m^2$;
- $d_l(w) = 500m^2$;

Les préférences exprimées peuvent être, par exemple, les suivantes (supposons que le décideur n'aime pas l'utilisation des terres) :

$$d_l(y) \succ d_l(x) \succ d_l(w) \succ d_l(z)$$

Une représentation numérique possible pourrait donc être :
$h_l(y) = 4, h_l(x) = 3, h_l(w) = 2, h_l(z) = 1$, mais aussi :
$h_l(y) = \frac{1}{50}, h_l(x) = \frac{1}{100}, h_l(w) = \frac{1}{500}, h_l(z) = \frac{1}{1000}$.

Suffisant ?

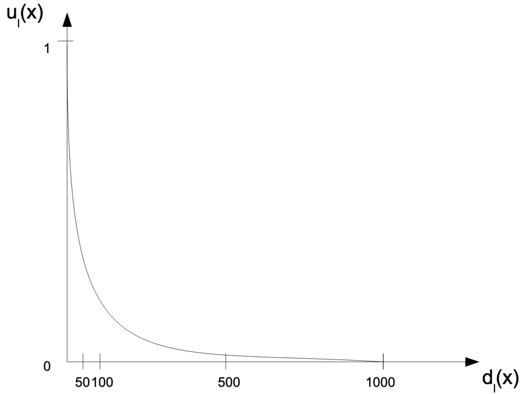
Nous avons;
Les attributs de chaque alternative et la représentation numérique des préférences du décideur (ordinal).

Suffisant ?

Nous avons;
Les attributs de chaque alternative et la représentation numérique des préférences du décideur (ordinal).

Mais:
Nous avons besoin de quelque chose de plus riche. Nous avons besoin de savoir, lorsque nous comparons x à y (et que nous préférons x) si cette préférence est "plus forte" que à celle exprimée en comparant (sur la même dimension) z à w. Nous avons besoin de comparer les différences de préférences.

Exemple



Par exemple, si la fonction ci-dessus représente la valeur de "l'utilisation du sol", il est clair que la différence entre $50m^2$ et $100m^2$ est beaucoup plus importante que celle entre $500m^2$ et $1000m^2$.

Résumé

Résumons notre processus jusqu'à présent.

- Nous avons les alternatives.
- Nous identifions leurs attributs pour **toutes** les dimensions pertinentes **pour le décideur**.
- Ces attributs sont ordonnées pour chaque dimension en utilisant les préférences du décideur.
- Nous calculons la fonction de valeur mesurant les différences des préférences (pour chaque dimension).

Résumé

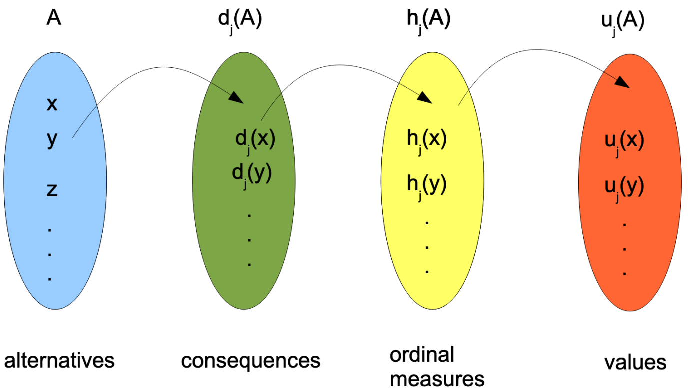


Figure: Processus jusqu'à présent.

Est-ce suffisant ?

Est-ce suffisant ?

Non !

- Le problème est que nous devons être en mesure de comparer les différences de préférences sur une dimension aux différences de préférences sur une autre dimension. *Exemple:* les différences de préférences sur l'utilisation des terres avec les différences de préférences en matière d'esthétique.
- En même temps, nous devons tenir compte de l'idée intuitive selon laquelle, pour un décideur donné, certaines dimensions sont plus "importantes" que d'autres.

Principales hypothèses

- Les préférences sur chaque dimension sont indépendantes.
- Les préférences sur chaque dimension sont mesurables en termes de différences.
- De bonnes valeurs sur une dimension peuvent compenser de mauvaises valeurs sur une autre dimension.

Principales hypothèses

Sous les hypothèses précédentes, on peut construire une fonction de valeur globale $U(x)$ comme suit :

$$U(x) = \sum_j u_j(x)$$

et si nous utilisons des fonctions de valeur marginale normalisées (dans l'intervalle $[0, 1]$) marginales $\bar{u}_j$ alors:

$$U(x) = \sum w_j \bar{u}_j(x)$$

Principales hypothèses

Si $h_j(x)$ représente les valeurs ordinales de la dimension j, alors $u_j(d_j(x)) = 0$ où $d_j(x)$ est la plus mauvaise valeur de h_j.

Dans le cas où nous utilisons des fonctions de valeur normalisées, alors $u_j(d_j(\bar{x})) = 1$ où $d_j(\bar{x})$ est la meilleure valeur de h_j.
Et où : w_j doit représenter "l'importance" des fonctions marginales.

Protocole standard

1. Demandez d'abord au décideur de choisir un "point central " correspondant à des évaluations moyenne sur les critères.
2. Demander au décideur de définir un pas unitaire sur n'importe quel critère (que nous appellerons dimension de référence).
   Nous appellerons ce pas s, il sera notre unité standard.
3. Utilisez les questions d'indifférence (voir plus loin) pour trouver des valeurs équivalentes pour les autres dimensions.
4. Faire de même avec la dimension de référence (celle utiliser pour créer s).

Questions d'indifférence

Étant donné que d_r est la dimension de référence, h_r étant les préférences ordinales, nous voulons établir une fonction de valeur pour la dimension d_k. Considérons un objet fictif x pour lequel nous avons $<h_r(x), h_k(x)>$. La question est la suivante :

$$<h_r(x), h_k(x)> \sim <h_r(x'), ?>$$

Pour toute autre dimension égal.

Quelle doit être la mesure sur la dimension k d'un objet x' dont la mesure sur la dimension de référence r est telle que $u_r(x') = u_r(x) + s$ si x et x' sont indifférents pour le décideur ?

Questions d'indifférence

Une fois qu'on a obtenu la réponse $h_k(x')$ du décideur, on continu comme suit:

$$<h_r(x), h_k(x')> \sim <h_r(x'), ?> \rightarrow h_k(x'')$$

$$<h_r(x), h_k(x'')> \sim <h_r(x'), ?> \rightarrow h_k(x''')$$

$$\ldots$$

Jusqu'à ce que l'ensemble de mesure de dimension k ait été couvert.

Remarque

- Commencez à considérer un point x au milieu des deux échelles h_r et h_k.
- Commencez ensuite à détériorer la dimension de référence d'une unité de valeur à la fois (ainsi, la dimension en cours de construction doit s'améliorer), jusqu'à ce que l'échelle supérieure de h_k soit atteinte.
  Enfin améliorez la dimension de référence d'une unité de valeur à la fois (ainsi, la dimension en cours de construction doit détériorer), jusqu'à ce que l'échelle inférieur de h_k soit atteinte.

Qu'obtient on ?

On a $U(x) = u_r(x) + u_k(x)$ par définition.
On a aussi $U(x') = u_r(x') + u_k(x')$ après questionnement.
Et puisque x et x' sont considérés comme indifférents $U(x) = U(x')$.
On obtient alors $u_r(x) + u_k(x) = u_r(x) + s + u_k(x')$ par construction.
On obtient $u_k(x') = u_k(x) - s$.

En procédant par récurrence, nous avons trouvé le point x au bas de l'échelle pour lequel, par définition, $u_k(x) = 0$. En utilisant segments linéaires entre tous les points découverts, nous formons la fonction de valeur u_k.

Exemple

Vous devez choisir un projet parmi un ensemble de projets évalués en fonction de trois critères : le coût, l'esthétique et la masse.
En ce qui concerne le coût, l'échelle va de $5M$ à $10M$.
L'esthétique est évaluée sur une échelle subjective allant de 0 à 8.
La masse est mesurée en kg et l'échelle va de $1kg$ à $5kg$.

Nom	Coût (c)	Esthétisme (e)	Masse (m)
A	$6.5M$	3	$3kg$
B	$7.5M$	4	$4.5kg$
C	$8M$	6	$2kg$
D	$9M$	7	$1.5kg$

Lequel est le meilleur ?

Préférences

Nous devons d'abord établir des préférences appropriées. Supposons dans votre cas, celles qui suivent :
Vous préférez le moins cher au plus cher (coût) ;
Vous préférez le "joli" au "moins joli" (esthétique) ;
Vous préférez le "lourd" au "moins lourd" (masse).

Après demande, le décideur nous dit que le point central est :

$$x = (7.5M, 4, 3.1kg)$$

On décide de prendre comme pas unitaire:

$$s = u_c(7.5M) - u_c(8M)$$

Fonction de la valeur de l'esthétisme

Afin de construire la fonction de valeur de l'esthétique, nous procédons avec le dialogue suivant :

$$<7.5M, 4> \sim <8M, ?>$$

Considérons un projet qui coûte $7.5M$ et qui est évalué sur le plan esthétique avec 4, et un projet qui coûte $8M$ (une unité de valeur de moins dans ce cas), de combien le second projet devrait-il être améliorer sur le plan esthétique pour être indifférent au premier ?

Fonction de la valeur de l'esthétisme

Afin de construire la fonction de valeur de l'esthétique, nous procédons avec le dialogue suivant :

$$<7.5M, 4> \sim <8M, ?>$$

Considérons un projet qui coûte $7.5M$ et qui est évalué sur le plan esthétique avec 4, et un projet qui coûte $8M$ (une unité de valeur de moins dans ce cas), de combien le second projet devrait-il être améliorer sur le plan esthétique pour être indifférent au premier ?Supposons que nous obtenions une réponse de 5 :

$$<7.5M, 4> \sim <8M, 5>$$

Fonction de la valeur de l'esthétisme

Afin de construire la fonction de valeur de l'esthétique, nous procédons avec le dialogue suivant :

$$<7.5M, 4> \sim <8M, ?>$$

Considérons un projet qui coûte $7.5M$ et qui est évalué sur le plan esthétique avec 4, et un projet qui coûte $8M$ (une unité de valeur de moins dans ce cas), de combien le second projet devrait-il être améliorer sur le plan esthétique pour être indifférent au premier ?Supposons que nous obtenions une réponse de 5 :

$$<7.5M, 4> \sim <8M, 5>$$

Nous répétons maintenant la question en utilisant la nouvelle valeur :

$$<7.5M, 5> \sim <8M, ?>$$

Nous obtenons maintenant une réponse de 6.

Fonction de la valeur l'esthétisme

Nous pouvons résumer le dialogue comme suit :

$$<7.5M, 4> \sim <8M, 5>$$

$$<7.5M, 5> \sim <8M, 6>$$

$$<7.5M, 6> \sim <8M, 7>$$

$$<7.5M, 7> \sim <8M, 7.5>$$

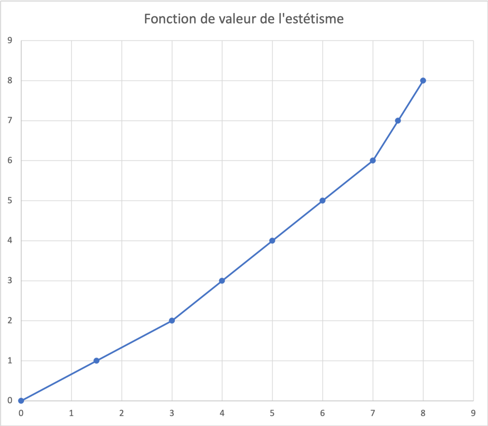
$$<7.5M, 7.5> \sim <8M, 8>$$

$$<8M, 4> \sim <7.5M, 3>$$

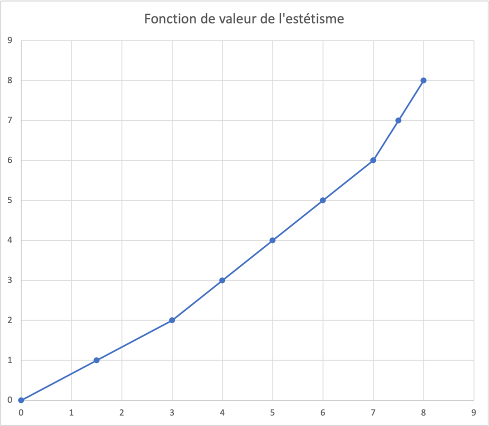
$$<8M, 3> \sim <7.5M, 1.5>$$

$$<8M, 1.5> \sim <7.5M, 0>$$

Fonction de la valeur de l'esthétisme



Fonction de la valeur de l'esthétisme



$$u_e(x) = \begin{cases} s \cdot \frac{2x_e}{3} & \text{if } x_e \in [0;3] \\ s \cdot (x_e - 1) & \text{if } x_e \in [3;7] \\ s \cdot (2x_e - 7) & \text{if } x_e \in [7;8] \end{cases}$$

Fonction de la valeur des poids

Afin de construire la fonction de valeur de poids, nous procédons avec le dialogue suivant :

$$<7.5M, 3.1kg> \sim <8M, ?>$$

Considérons un projet qui coûte $7.5M$ et qui est évalué sur le plan esthétique avec $3.1kg$, et un projet qui coûte $8M$ (une unité de valeur de moins dans ce cas) de combien le second projet devrait-il être améliorer sur le plan du poids pour être indifférent au premier ?
Supposons que nous obtenions une réponse de $3.5kg$:

$$<7.5M, 3.1kg> \sim <8M, 3.5kg>$$

Fonction de la valeur des poids

Afin de construire la fonction de valeur de poids, nous procédons avec le dialogue suivant :

$$<7.5M, 3.1kg> \sim <8M, ?>$$

Considérons un projet qui coûte $7.5M$ et qui est évalué sur le plan esthétique avec $3.1kg$, et un projet qui coûte $8M$ (une unité de valeur de moins dans ce cas) de combien le second projet devrait-il être améliorer sur le plan du poids pour être indifférent au premier ?
Supposons que nous obtenions une réponse de $3.5kg$:

$$<7.5M, 3.1kg> \sim <8M, 3.5kg>$$

Nous répétons maintenant la question en utilisant la nouvelle valeur :

$$<7.5M, 3.5kg> \sim <8M, ?>$$

Nous obtenons maintenant une réponse de $3.9kg$.

Fonction de la valeur des poids

Nous pouvons résumer le dialogue comme suit :

$$<7.5M, 3.1> \sim <8M, 3.5>$$

$$<7.5M, 3.5> \sim <8M, 3.9>$$

$$<7.5M, 3.9> \sim <8M, 5>$$

$$<8M, 3.1> \sim <7.5M, 2.7>$$

$$<8M, 2.7> \sim <7.5M, 2.3>$$

$$<8M, 2.3> \sim <7.5M, 1.9>$$

$$<8M, 1.9> \sim <7.5M, 1.75>$$

$$<8M, 1.75> \sim <7.5M, 1.6>$$

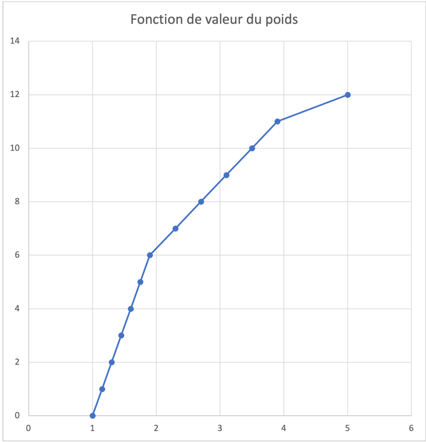
$$<8M, 1.6> \sim <7.5M, 1.45>$$

$$<8M, 1.45> \sim <7.5M, 1.3>$$

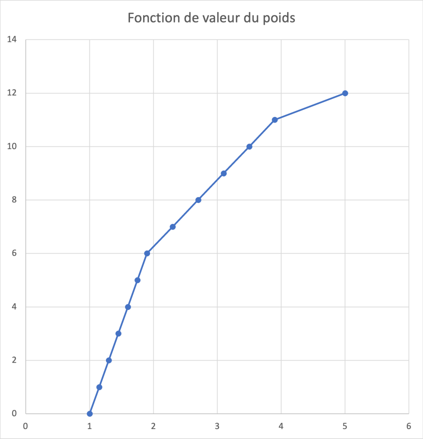
$$<8M, 1.3> \sim <7.5M, 1.15>$$

$$<8M, 1.15> \sim <7.5M, 1>$$

Fonction de la valeur de poids



Fonction de la valeur de poids



$$u_p(x) = \begin{cases} s \cdot \frac{(x_p - 1)}{0.15} & \text{if } x_p \in [1; 1.9] \\ s \cdot (2.5 \cdot x_p + 1.25) & \text{if } x_p \in [1.9; 3.9] \\ s \cdot (\frac{10}{11} x_p + \frac{82}{11}) & \text{if } x_p \in [3.9; 5] \end{cases}$$

Fonction de valeur de coût

Afin de construire la fonction de valeur de coût, nous procédons avec le dialogue suivant :

$$<3.5kg, 7.5M> \sim <3.1kg, ?>$$

Considérons un projet qui à un poids de $3.5kg$ et qui est évalué sur le plan du coût à $8M$, et un projet qui pèse $3.1kg$ (une unité de valeur de moins dans ce cas) de combien le second projet devrait-il être améliorer sur le plan du pris pour être indifférent au premier ? Supposons que nous obtenions une réponse de $7M$:

$$<3.5kg, 7.5M> \sim <3.1kg, 7M>$$

Nous répétons maintenant la question en utilisant la nouvelle valeur :

$$<3.5kg, 7M> \sim <3.1kg, ?>$$

Nous obtenons maintenant une réponse de $6.5M$.

Fonction de la valeur de coût

Nous pouvons résumer le dialogue comme suit :

$$<3.5kg, 7.5M> \sim <3.1kg, 7M>$$

$$<3.5kg, 7M> \sim <3.1kg, 6.5M>$$

$$<3.5kg, 7.5M> \sim <3.1kg, 7M>$$

$$<3.5kg, 7M> \sim <3.1kg, 6.5M>$$

$$<3.5kg, 6.5M> \sim <3.1kg, 6M>$$

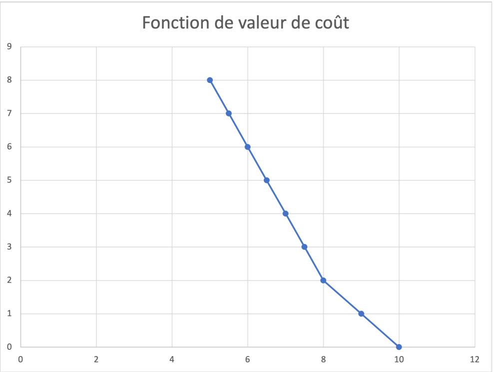
$$<3.5kg, 6M> \sim <3.1kg, 5.5M>$$

$$<3.5kg, 5.5M> \sim <3.1kg, 5M>$$

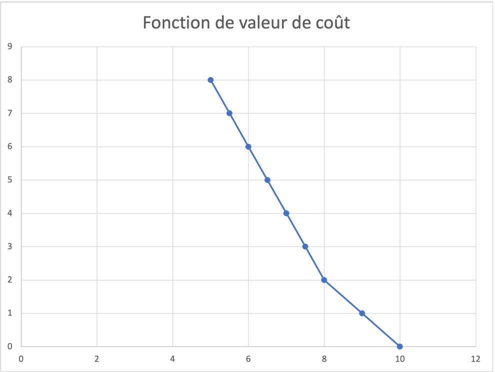
$$<3.1kg, 8M> \sim <3.5kg, 9M>$$

$$<3.1kg, 9M> \sim <3.5kg, 10M>$$

Fonction de la valeur de coût



Fonction de la valeur de coût



$$u_p(x) = \begin{cases} s \cdot (-2x_c + 18) & \text{if } x_c \in [5; 8] \\ s \cdot (-x_c + 10) & \text{if } x_c \in [8; 10] \end{cases}$$

Calculs finaux

Après avoir obtenu les trois fonctions de valeur, nous pouvons maintenant calculer les valeurs des quatre projets pour chacune d'entre elles.
En fixant arbitrairement la valeur de $s = 1$.

$$u_c(A) = 5 \quad u_e(A) = 2 \quad u_p(A) = 8.75$$

$$u_c(B) = 3 \quad u_e(B) = 3 \quad u_p(B) = 11.54$$

$$u_c(C) = 2 \quad u_e(C) = 5 \quad u_p(C) = 6.25$$

$$u_c(D) = 1 \quad u_e(D) = 6 \quad u_p(D) = 3.3333$$

Calculs finaux

Enfin;

$$U(A) = 5 + 2 + 8.75 = 15.75$$

$$U(B) = 3 + 3 + 11.54 = 17.54$$

$$U(C) = 2 + 5 + 6.25 = 13.25$$

$$U(D) = 1 + 6 + 3.33 = 10.33$$

Le projet qui maximise la valeur du décideur est le B.

Où sont les poids ?

Supposons que nous utilisions des fonctions de valeur normalisées qui doivent être “pondérées”. Nous rappelons que dans un tel cas, nous avons :

$$U(x) = \sum_j w_j \bar{u}_j(x)$$

On cherche à trouver le tradeoff entre deux “poids” w_i et w_j.
Il suffit de prendre deux solutions (x et y) indifférentes et différente seulement sur d_i et d_j.

Où sont les poids ?

Nous avons alors;

$$w_i\bar{u}_i(x_i) + w_j\bar{u}_j(x_j) = w_i\bar{u}_i(y_i) + w_j\bar{u}_j(y_j)$$

$$w_i\bar{u}_i(x_i) - w_i\bar{u}_i(y_i) = w_j\bar{u}_j(y_j) - w_j\bar{u}_j(x_j)$$

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{\bar{u}_j(y_j) - \bar{u}_j(x_j)}{\bar{u}_i(x_i) - \bar{u}_i(y_i)}$$

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{\frac{u_j(y_j)-u_j}{\bar{u}_j} - \frac{u_j(x_j)-u_j}{\bar{u}_j}}{\frac{u_j(x_i)-u_j}{\bar{u}_j} - \frac{u_j(y_i)-u_j}{\bar{u}_j}}$$

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{u_j(y_j) - u_j(x_j)}{u_i(x_i) - u_i(y_i)} \cdot \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_j}$$

Où sont les poids ?

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{u_j(y_j) - u_j(x_j)}{u_i(x_i) - u_i(y_i)} \cdot \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_j}$$

Si on prends $x = <7.5M, 3.1kg>$ et $y = <8M, 3.5kg>$
$\frac{w_p}{w_c} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$
la masse représente 150% de la valeur du coût.

Si on prends $x = <7.5M, 4>$ et $y = <8M, 5>$
$\frac{w_p}{w_c} = \frac{8}{8} = 1$
l'esthétique représente la même valeur que le coût.

Où sont les poids ?

- Il n'est pas surprenant que le "poids" de chaque critère soit représenté par la valeur maximale qu'il atteint.
- Il est préférable de ne pas utiliser de "poids" lors de la construction des fonctions de valeur, car cela peut être source de confusion pour les utilisateurs. Nous pouvons expliquer l'importance relative de chaque critère en utilisant les compromis.

Les "poids" sont les compromis entre les fonctions de valeur et, en tant que telles, ils sont établies dès que les fonctions de valeur sont construites. Ils n'existent pas indépendamment et il n'est pas correct de demander au décideur de les exprimer.

Fondamentaux d'ELECTRE I

- Les méthodes ELECTRE sont des méthodes d'aide à la décision multicritère basée sur le concept de surclassement.
- Les critères peuvent être qualitatifs ou quantitatifs.

ELECTRE I

- Ensemble d'actions $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$: les options ou alternatives à évaluer.
- Fonction d'évaluation $g_j(a)$ pour chaque critère j (avec $j = 1$ à n, où n est le nombre total de critères).
- Poids k_j pour chaque critère j, reflétant l'importance relative du critère.

Indice de Concordance $C(a, b)$:

- Mesure la pertinence de l'affirmation a surclasse b pour deux actions a et b.
- Défini comme

$$C(a, b) = \frac{\sum_{j:g_j(a) \geq g_j(b)} k_j}{\sum_{j=1}^{n} k_j}$$

- $C(a, b)$ varie entre 0 et 1, où 1 indique un fort accord avec l'affirmation que a surclasse b.

Indice de Discordance $D(a,b)$:

- $D(a,b) = 0$ si $g_j(a) \geq g_j(b)$ pour tout critère j.
- Sinon, $D(a,b) = \max_j \left[\frac{g_j(b)-g_j(a)}{\delta}\right]$ où δ est la différence maximale observée pour le même critère entre deux actions.

Relation de Surclassement

- Une action a surclasse une action b (aSb) si les conditions suivantes sont remplies :
  - L'indice de concordance $C(a,b)$ est supérieur ou égal à un seuil limite de concordance $\hat{c}$.
  - L'indice de discordance $D(a,b)$ est inférieur ou égal à un seuil limite de discordance $\hat{d}$.
- Ces seuils $\hat{c}$ et $\hat{d}$ sont définis par l'analyste en fonction du contexte de la décision.

Contexte et Critères de Décision

Contexte

Choix parmi 6 initiatives évaluées selon leur impact environnemental et leur contribution à la durabilité.

Critères de Durabilité

- Cr1 : Réduction de l'empreinte carbone
- Cr2 : Conservation de la biodiversité
- Cr3 : Gestion durable de l'eau
- Cr4 : Intégration avec les espaces verts locaux
- Cr5 : Promotion des activités éco-responsables

Poids des Critères et Tableau de Performances

Poids des Critères

Critères	Cr1	Cr2	Cr3	Cr4	Cr5
Poids	3	2	3	1	1

Les poids traduisent l'importance de chaque critère dans la prise de décision.

Tableau de Performances

Projets	Cr1	Cr2	Cr3	Cr4	Cr5
P1	10	20	5	10	16
P2	0	5	5	16	10
P3	0	10	0	16	7
P4	20	5	10	10	13
P5	20	10	15	10	13
P6	20	10	20	13	13

Matrice de Concordance

Matrice de Concordance

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	0.9	0.9	0.4	0.4	0.3
P2	0.4	-	0.8	0.4	0.1	0.1
P3	0.1	0.6	-	0.3	0.3	0.3
P4	0.7	0.9	0.7	-	0.5	0.4
P5	0.7	0.9	0.9	1.0	-	0.6
P6	0.7	0.9	0.9	1.0	1.0	-

Matrice de Discordance

Matrice de Discordance

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1	-	0.30	0.30	0.50	0.50	0.75
P2	0.75	-	0.25	1.00	1.00	1.00
P3	0.50	0.25	-	1.00	1.00	1.00
P4	0.75	0.30	0.30	-	0.25	0.50
P5	0.50	0.30	0.30	0.0	-	0.25
P6	0.50	0.15	0.15	0.0	0.0	-

Résultats et Graphes de Surclassement avec ELECTRE I

Seuils de Concordance et de Discordance

En fixant les seuils à $\hat{c} = 1$ et $\hat{d} = 0$, les relations de surclassement suivantes sont obtenues : P_1, P_2, P_3 et P_6 sont incomparables, tandis que P_6SP_4, P_6SP_5 et P_5SP_4.

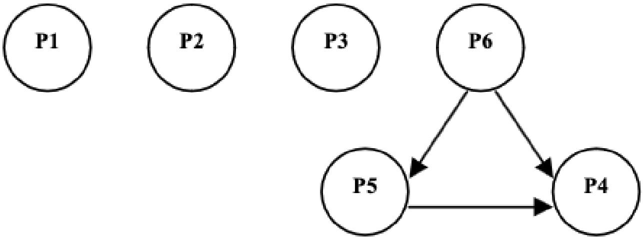


Figure: Graphe de Surclassement pour $\hat{c} = 1$ et $\hat{d} = 0$

Résultats et Graphes de Surclassement avec ELECTRE I

Seuils de Concordance et de Discordance

En fixant les seuils à $\hat{c} = 0.9$ et $\hat{d} = 0.15$, les relations de surclassement suivantes sont obtenues : P_6SP_2, P_6SP_3, P_6SP_4 et P_6SP_5. Les projets à retenir seraient P_1 et P_6.

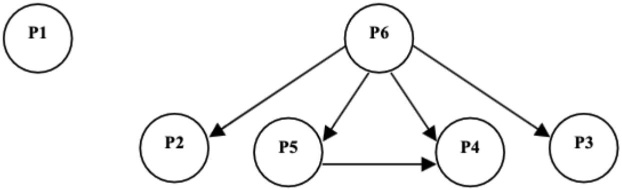


Figure: Graphe de Surclassement pour $\hat{c} = 0.9$ et $\hat{d} = 0.15$

Introduction à ELECTRE-TRI

Principe de la Méthode ELECTRE-TRI

ELECTRE-TRI est une méthode utilisée pour des problèmes d'affectation. Elle permet d'assigner un ensemble de m alternatives $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$ à des catégories prédéfinies en fonction de critères multiples.

Évaluation des Alternatives

- Ensemble des critères $F = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Fonctions d'évaluation $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ exprimant l'évaluation de chaque action pour les critères.
- Ensemble des poids des critères $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ reflétant leur importance dans la prise de décision.

Affectation aux Catégories

- Alternatives comparées à des seuils $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_h\}$ qui définissent les frontières entre h catégories prédéfinies.
- Profils de frontière $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_h\}$ servant de référence pour le classement des alternatives.

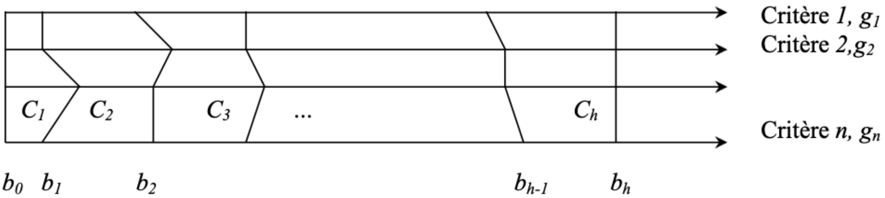


Figure: Illustration de la problématique de tri

Évaluation des Indices de Concordance

Formule d'Indice de Concordance

Pour chaque critère j et profil de frontière b_h, l'indice de concordance $c_j(a, b_h)$ est calculé comme suit :

$$c_j(a, b_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(b_h) - g_j(a) \geq p_j(b_h) \\ 1 & \text{si } g_j(b_h) - g_j(a) \leq q_j(b_h) \\ \frac{p_j(b_h) + g_j(a) - g_j(b_h)}{p_j(b_h) - q_j(b_h)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Seuils d'Indifférence et de Préférence

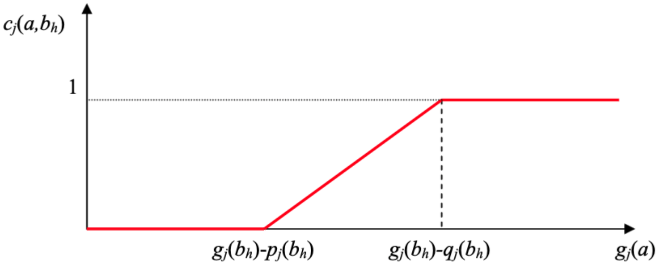
- Le seuil d'indifférence $q_j(b_h)$ est la différence de performance pour le critère j en dessous de laquelle l'alternative a est jugée aussi bonne que le profil b_h.
- Le seuil de préférence $p_j(b_h)$ est la différence de performance pour le critère j au-delà de laquelle le profil b_h est nettement préféré à l'alternative a.

Évaluation des Indices de Concordance

Formule d'Indice de Concordance

Pour chaque critère j et profil de frontière b_h, l'indice de concordance $c_j(a, b_h)$ est calculé comme suit :

$$c_j(a, b_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(b_h) - g_j(a) \geq p_j(b_h) \\ 1 & \text{si } g_j(b_h) - g_j(a) \leq q_j(b_h) \\ \frac{p_j(b_h) + g_j(a) - g_j(b_h)}{p_j(b_h) - q_j(b_h)} & \text{sinon} \end{cases}$$



Calcul de l'Indice de Concordance Global

Formule de l'Indice de Concordance Global

L'indice de concordance global $C(a, b_h)$ pour une alternative a par rapport à un profil de frontière b_h est donné par :

$$C(a, b_h) = \frac{\sum_{j \in F} k_j \cdot c_j(a, b_h)}{\sum_{j \in F} k_j}$$

où F est l'ensemble des indices des critères et k_j est le poids associé au critère j.

Interprétation

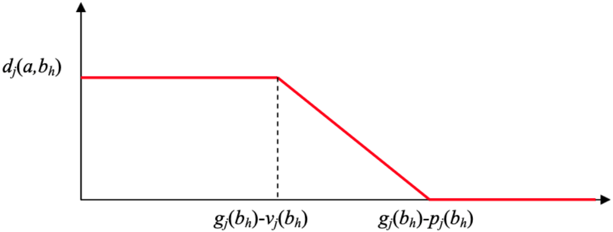
Cet indice représente une moyenne pondérée des indices de concordance individuels pour chaque critère, permettant d'évaluer à quel point l'ensemble des critères soutient la décision d'affecter l'alternative a à la catégorie définie par le profil b_h.

Calcul de l'Indice de Discordance

Formule de l'Indice de Discordance

$$d_j(a, b_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(b_h) - g_j(a_h) \leq p_j(b_h) \\ 1 & \text{si } g_j(b_h) - g_j(a_h) > v_j(b_h) \\ \frac{p_j(b_h) - (g_j(b_h) - g_j(a))}{p_j(b_h) - v_j(b_h)} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $p_j(b_h)$ est le seuil de préférence et $v_j(b_h)$ est le seuil de veto le critère j.



Indice de Crédibilité et Relation de Surclassement Floue

Indice de Crédibilité $\sigma(a, b_h)$

L'indice de crédibilité $\sigma(a, b_h)$ entre une alternative a et un profil de frontière b_h est calculé par :

$$\sigma(a, b_h) = C(a, b_h) \prod_{j \in \bar{F}} \frac{1 - d_j(a, b_h)}{1 - C(a, b_h)}$$

où $\bar{F}$ est l'ensemble des critères tels que $d_j(a, b_h) > C(a, b_h)$.

Relation de Surclassement selon l'Indice de Crédibilité et l'Indice de Coupe λ

- Si $\sigma(a, b_h) \geq \lambda$ et $\sigma(b_h, a) \geq \lambda$, alors a et b_h sont indifférents l'un à l'autre (noté aIb_h).
- Si $\sigma(a, b_h) \geq \lambda$ et $\sigma(b_h, a) < \lambda$, alors a surclasse b_h (noté aSb_h).
- Si $\sigma(a, b_h) < \lambda$ et $\sigma(b_h, a) \geq \lambda$, alors b_h surclasse a.
- Si $\sigma(a, b_h) < \lambda$ et $\sigma(b_h, a) < \lambda$, alors a et b_h sont incomparables.

Procédures d'Affectation dans ELECTRE-TRI

Procédure Pessimiste

1. Comparer successivement a aux profils b_i, pour $i = p, p-1, \ldots, 0$.
2. Si aSb_h, alors a est assigné à la catégorie C_{h+1}.

Procédure Optimiste

1. Comparer successivement a aux profils b_i, pour $i = 1, 2, \ldots, p$.
2. Si b_hSa, alors a est assigné à la catégorie C_h.

Note

La procédure pessimiste suppose le pire cas en assignant a à la catégorie la plus basse qui la surclasse, tandis que la procédure optimiste assigne a à la catégorie la plus élevée qu'elle ne surclasse pas.

Exemple Numérique avec ELECTRE-TRI

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
a_1	75	67	85	82	90
a_2	28	35	70	90	95
a_3	45	60	55	68	60

Table: Matrice d'évaluation

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
b_1	50	48	55	55	60
b_2	70	75	80	75	85
k_j	1	1	1	1	1
$q_j(b)$	5	5	5	5	5
$p_j(b)$	10	10	10	10	10
$v_j(b)$	30	30	30	30	30

Table: Paramètres de préférence

Comparaison de a_1 avec le profil b_2

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
$c_j(a_1, b_2)$	1	0.4	1	1	1
$c_j(b_2, a_1)$	1	1	1	1	1

$$c(a_1, b_2) = \frac{1}{5}(1 + 0.4 + 1 + 1 + 1) = 0.88$$

$$c(b_2, a_1) = \frac{1}{5}(1 + 1 + 1 + 0.4 + 1) = 0.88$$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
$d_j(a_1, b_2)$	0	0	0	0	0
$d_j(b_2, a_1)$	0	0	0	0	0

$$\sigma(a_1, b) = c(a_1, b) = 0.88$$

$$\sigma(b, a_1) = c(b, a_1) = 0.88$$

Avec $\lambda = 0.75$, on détermine que : $\begin{cases} \sigma(a_1, b_2) \geq \lambda & \Longrightarrow \quad a_1 S b \\ \sigma(b_2, a_1) \geq \lambda & \Longrightarrow \quad b_2 S a_1 \end{cases} \Longrightarrow \quad a_1 I b_2$

Comparaison de a_2 avec le profil b_2

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
$c_j(a_2, b_2)$	0	0	0	1	1
$c_j(b_2, a_2)$	1	1	1	0	0

$$c(a_2, b_2) = \frac{1}{5}(0+0+0+1+1) = 0.4$$

$$c(b_2, a_2) = \frac{1}{5}(1+1+1+0+0) = 0.6$$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
$d_j(a_2, b_2)$	1	1	0	0	0
$d_j(b_2, a_2)$	0	0	0	0.25	0

$\sigma(a_2, b) = 0$ car $d_j(a_2, b) = 1$ pour $j = 1, 2$
$\sigma(b, a_2) = 0.6$ car $d_j(b_2, a2) < c(a_2, b)$ pour tout j

Avec $\lambda = 0.75$, on détermine que : $\begin{cases} \sigma(a_2, b_1) < \lambda & \implies \textit{non } a_2 S b_1 \\ \sigma(b_2, a_2) < \lambda & \implies \textit{non } b_2 S a_2 \end{cases} \implies a_2$ sont incomparable b

Comparaison de a_3 avec le profil b_2

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
$c_j(a_3, b_2)$	0	0	0	0.6	0
$c_j(b_2, a_3)$	1	1	1	1	1

$$c(a_2, b_2) = \frac{1}{5}(0 + 0 + 0 + 0.6 + 0) = 0.12$$

$$c(b_2, a_2) = \frac{1}{5}(1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 1$$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
$d_j(a_2, b_2)$	0.75	0.25	0.75	0	0.75
$d_j(b_2, a_2)$	0	0	0	0	0

$\sigma(a_3, b) = 0.12 \times \frac{1-0.75}{1-0.12} \times \frac{1-0.25}{1-0.12} \times \frac{1-0.75}{1-0.12} \times \frac{1-0.75}{1-0.12} \approx 0$
$\sigma(b, a_3) = c(b, a_3) = 1$

Avec $\lambda = 0.75$, on détermine que : $\begin{cases} \sigma(a_3, b_2) < \lambda & \implies \text{non } a_3 S b_1 \\ \sigma(b_2, a_3) \geq \lambda & \implies b_2 S a_2 \end{cases} \implies a_2$ est préféré par b_3

Exemple Numerique avec ELECTRE-TRI

	$\sigma(a_i, b_1)$	$\sigma(b_1, a_i)$	$\sigma(a_i, b_2)$	$\sigma(b_2, a_i)$
a_1	1	0	0.88	0.88
a_2	0.6	0	0	0.6
a_3	1	0.6	0	1

Table: Crédibilité indice

$\lambda = 0.75$

	b_1	b_2
a_1	est préfère à	indifférence
a_2	incomparable	incomparable
a_3	est préfère à	est préféré par

Table: Relation entre les alternatives et les profils

Pessimiste: $a_1 \in C_2, a_2 \in C_1, a_3 \in C_2$

Optimiste: $a_1 \in C_3, a_2 \in C_3, a_3 \in C_2$