Décision dans le risque/dans l'incertain

Theorie du mesurage

Nicolas Fayard

September 24, 2024

Décision dans le risque/dans l'incertain

Décision dans le certain

- A : ensemble d'actions (décisions possibles)
- X : ensemble de conséquences
- $c(a) \in X$: conséquence de la mise à exécution de $a \in A$

Problème

- La décision ne dispose que pour l'avenir
- $c(a)$ n'est pas connu avec certitude

Décision dans le risque/dans l'incertain

Décision dans le risque

- $c(a)$ est une distribution de probabilité sur X

Décision dans l'incertain

- $c(a)$ est connu par référence à un certain nombre de scénarios

Modélisation

- X: ensemble de conséquences
- X fini $= \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- $X \subseteq \mathbb{R}$ (sommes monétaires)
- Loterie simple sur X
- $\ell = (x_1, p_1; x_2, p_2; \ldots; x_n, p_n)$
- $p_\ell(x_i)$: probabilité de x_i avec ℓ

Critère Classique : Espérance Mathématique de Gain (EMG)

Définition

$$\ell \succ \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} x p_\ell(x) > \sum_{x \in X} x p_{\ell'}(x)$$

$$\ell \sim \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} x p_\ell(x) = \sum_{x \in X} x p_{\ell'}(x)$$

Avantages

- Simple
- Bonne utilisation de l'information
- "Délégable"

Cas 1: Risque Faible

- $P(\text{Gagner } 100\$) = \frac{1}{2}$, $P(\text{Perdre } 50\$) = \frac{1}{2}$

Aversion au risque et Utilité Espérée

Cas 1: Risque Faible

- $P(\text{Gagner } 100\$) = \frac{1}{2}$, $P(\text{Perdre } 50\$) = \frac{1}{2}$
- $E(\ell) = 25$, Préféré à gain sûr de 0$

Cas 2: Risque Élevé

- $P(\text{Gagner } 100{,}000\$) = \frac{1}{2}$, $P(\text{Perdre } 50{,}000\$) = \frac{1}{2}$

Aversion au risque et Utilité Espérée

Cas 1: Risque Faible

- $P(\text{Gagner } 100\$) = \frac{1}{2}$, $P(\text{Perdre } 50\$) = \frac{1}{2}$
- $E(\ell) = 25$, Préféré à gain sûr de 0$

Cas 2: Risque Élevé

- $P(\text{Gagner } 100{,}000\$) = \frac{1}{2}$, $P(\text{Perdre } 50{,}000\$) = \frac{1}{2}$
- $E(\ell) = 25,000$, Non préféré à gain sûr de 0$

Observation

Comportements différents selon l'ampleur du risque, reflétant une aversion au risque malgré une utilité espérée positive.

Inconvénients

- Restreint aux conséquences numériques
- Pas de justification claire
- En contradiction avec le comportement observé de personnes rationnelles (diversification, assurance)

Paradoxe de Saint-Pétersbourg (D. Bernoulli)

Jeu

Un banquier joue avec un joueur . Le joueur paye un droit d'entrée au banquier. Le banquier jette ensuite une pièce autant de fois qu'il faut pour que face apparaisse. Le jeu s'arrête ensuite. Si face est apparue au nième coup, le banquier verse 2^n € au joueur.

Question

Combien un joueur rationnel devrait être prêt à payer pour participer à ce jeu ?

EMG

$EMG = 2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 2^3 \times \frac{1}{8} + \dots$
(Une chance sur deux de ne gagner que 2 € !)

Remarque

Si les enjeux sont petits (peu ou pas de risque de ruine) et les décisions sont répétitives , le critère EMG peut constituer une approximation satisfaisante.

Autre Critère Classique : EMG + Variance

Idée

Ajouter une mesure de risque (dispersion) à la mesure de tendance centrale.

Problèmes

- Plus compliqué
- Comment traiter les deux critères ? (sous-ensemble efficace ou critère de synthèse ?)
- La variance est-elle une bonne mesure du risque ? (écart inter-quartile, semi-variance, etc.)

Exemple

Soit deux loteries:

- $x_1 = 2000,\ x_2 = -8000,\ p_1 = 0.9,\ p_2 = 0.1$
- $y_1 = 0,\ y_2 = 10000,\ q_1 = 0.9,\ q_2 = 0.1$

EMG

$$E(\lambda) = 0.9 \times 2000 + 0.1 \times (-8000) = 1000$$
$$= 0.9 \times 0 + 0.1 \times 10000$$

Variance

$$Var(\lambda) = 0.9 \times (2000 - 1000)^2 + 0.1 \times (-8000 - 1000)^2$$
$$= 0.9 \times 1000^2 + 0.1 \times 9000^2$$
$$= 0.9 \times (0 - 1000)^2 + 0.1 \times (10000 - 1000)^2$$

Ces deux loteries sont nécessairement indifférentes.

Problèmes

- Ces critères ne prennent pas en compte la psychologie d'un individu vis-à-vis du risque
- Quel est le patrimoine de l'individu ?
- Quels sont ses revenus ?
- Quelle est son attitude vis-à-vis du risque ?
- Etc.

Pseudo-Solution

Pseudo-Solution

Interroger directement un individu sur ses préférences.

Problèmes

- Cohérence ?
- Non délégable !
- Effort cognitif.

Exemple

Choix simple

- 2000 avec probabilité 0.5, 0 avec probabilité 0.5
- 500 avec probabilité 0.5, 1 avec probabilité 0.5

Choix compliqué

- $N(878,32;72,45)$
- $Bi(1200;0.75)$

Théorie de l'utilité espérée

Idée

- Interroger un individu sur des choix simples
- Modéliser son comportement dans un modèle mathématique
- Utiliser le modèle pour des cas plus compliqués

Un décideur est indiffèrent à deux loteries SSI:

$$\ell \sim \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} u(x) p_{\ell}(x) = \sum_{x \in X} u(x) p_{\ell'}(x)$$

Fonction d'utilité

Fonction d'utilité

- $u : X \to \mathbb{R}$.
- $u(x)$ est l'"utilité" de la conséquence $x \in X$.
- La fonction u est propre à un individu.

Avantages:

- Simple
- Délégable
- Prend en compte les caractéristiques individuelles
- Justification claire (axiomes)

Axiome 1

Rangement

Pour tout ℓ et $\ell' \in L(X)$ l'une ou moins des deux propositions suivantes est vraie:

- ℓ est préféré ou indiffèrent à ℓ' ($\ell \succeq \ell'$)
- ℓ' est préféré ou indiffèrent à ℓ ($\ell' \succeq \ell$)

Et, $\succeq$ est transitive:

$$\ell \succeq \ell' \text{ et } \ell' \succeq \ell'' \Rightarrow \ell \succeq \ell''$$

$\forall \ell, \ell', \ell'' \in L(X)$

A1 implique que $\sim$ et $\succ$ sont transitive.

Exemple d'indifférence non transitive.

On cherche à représenter les préférences d'un décideur sur le nombre de grain de sucre à mettre dans son café.
On sait que:

$$0 \sim 1, \ 1 \sim 2, \ \cdots, \ 998 \sim 999, \ 999 \sim 1,000$$

Donc d'après la transitivité de l'indifférence: $0 \sim 1,000$

Exemple de préférence non transitive (effet de seuil)

Choix d'un menu:

1	Plat	15e
2	Entré + Plat	20e
3	Entré + Plat + Dessert	23e
4	Entré + Plat + Dessert + Café	25e

Un décideur peut:

$2 \succ 1,\ 3 \succ 2,\ 4 \succ 3$ mais $1 \succ 4$.

Axiome 3

Réduction

ℓ_j: loteries composées du premier ordre

- Soit ℓ_j une combinaison des loteries $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$ avec des probabilités respectives $r_1, r_2, \ldots, r_k$.
- Chaque loterie ℓ_i aboutit à un résultat x_i avec une probabilité $p_{\ell_j}(x_i)$.
- La probabilité composée d'obtenir le résultat x_i dans la loterie ℓ_j est donc $q_i = \sum_{j=1}^{k} r_j p_{e_j}(x_i)$.
- Par conséquent, si on considère les probabilités composées $q_1, q_2, \ldots, q_n$ pour les résultats $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'individu serait indifférent entre la loterie ℓ_j et une loterie avec des résultats directs x_i et des probabilités q_i.

Interprétation

"On ne s'amuse pas au jeu". L'individu est indifférent aux différentes structurations de loteries, se souciant seulement des probabilités finales des résultats.

Axiome 3

Monotonie

Si $(x, 1) \succ (y, 1)$ alors

$$(x, p; y, 1-p) \succ (x, q; y, 1-q) \Leftrightarrow p > q \quad (\forall x, y \in X)$$

Interprétation

- On aime le gain
- Pas de superstition

Axiome 3

Continuité

Si $(x,1) \succ (y,1) \succ (z,1)$ alors il existe une probabilité $p]0;1[$ telle que :

$$(y,1) \sim (x,p;z,1-p)$$

Remarque

L'axiome de monotonie implique que cette probabilité est unique.

Axiome 4

Exemple

- x : Gagner 2 centimes
- y : Gagner 1 centime
- z : Mourir

$$(x, 1) \succ (y, 1) \succ (z, 1)$$

Quel valeur de p pour avoir:

$$(y, 1) \sim (x, p; z, 1 - p)$$

$p = 0.9999999...?$

Axiomes 5

Indépendance

$$L_1 = (\ell_1, p_1; \ell_2, p_2; \cdots \ell_k, p_k)$$

$$L_2 = (\ell_1', p_1; \ell_2, p_2; \cdots \ell_k, p_k)$$

Si $\ell_1 \sim \ell_1'$ alors $L_1 \sim L_2$ et
Si $\ell_1 \succ \ell_1'$ alors $L_1 \succ L_2$.

Conséquences des axiomes

Soit une relation de préférence $\geq$ sur $L(X)$.
Cette relation vérifie les axiomes $A1 - A5$ si et seulement si
il existe une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\ell \geq \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} u(x) p_\ell(x) \geq \sum_{x \in X} u(x) p_{\ell'}(x)$$

u est une Fonction d'utilité de von Neumann–Morgenstern (VNM)

Conséquences des axiomes

Théorème (Unicité)

S'il existe deux fonctions u et v vérifiant VNM alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$ tels que :

$$v(x) = \alpha u(x) + \beta, \quad \forall x \in X$$

Interprétation

- Les vNM sont des échelles d'intervalles.
- Les préférences se mesurent comme la température.

Cas général;

$$u(x) = pu(y) + (1 - p)u(z)$$

Il y a 4 inconnues, il faut donc en fixer 3 et trouver l'indifférence sur la quatrième.

Hypothèses

Soit $X = \mathbb{R}$ des sommes d'argent
On pose $u(0) = 0$ et $u(1,000) = 1$.

Encodage d'une fonction d'utilité

Quel valeur de x pour avoir: $(x, 1) \sim (1000, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x) = u(1000) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.5$.

Encodage d'une fonction d'utilité

Quel valeur de x pour avoir: $(x, 1) \sim (1000, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x) = u(1000) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.5$.

Quel valeur de y pour avoir: $(y, 1) \sim (x, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(y) = u(x) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.

Encodage d'une fonction d'utilité

Quel valeur de x pour avoir: $(x, 1) \sim (1000, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x) = u(1000) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.5$.

Quel valeur de y pour avoir: $(y, 1) \sim (x, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(y) = u(x) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.

Quel valeur de z pour avoir: $(z, 1) \sim (1000, 0.5; x, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(z) = u(1000) \times 0.5 + u(x) \times 0.5 = 0.75$.

Encodage d'une fonction d'utilité

Quel valeur de x pour avoir: $(x, 1) \sim (1000, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x) = u(1000) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.5$.

Quel valeur de y pour avoir: $(y, 1) \sim (x, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(y) = u(x) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.

Quel valeur de z pour avoir: $(z, 1) \sim (1000, 0.5; x, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(z) = u(1000) \times 0.5 + u(x) \times 0.5 = 0.75$.

Contrôle:

- On doit avoir $(x, 1) \sim (y, 0.5; z, 0.5)$
- Sinon : revenir en arrière.

Exemple

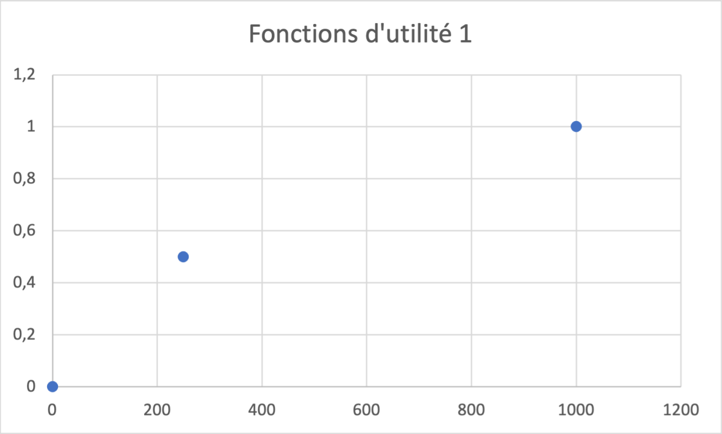
Hypothèses

Soit $X = \mathbb{R}$ des sommes d'argent
On pose $u(0) = 0$ et $u(1,000) = 1$.

Quel valeur de x_4 pour avoir: $(x_4, 1) \sim (1000, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_4) = u(1000) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.5$.
Réponse: x_4= **250**

Exemple

x	0	250	1000
$v(x)$	0	0.5	1



Encodage d'une fonction d'utilité

x	0	250	1000
$v(x)$	0	0.5	1

Quel valeur de x_2 pour avoir: $(x_2, 1) \sim (\mathbf{250}, 0.5; 0, 0.5)$?

On sait que $1 \times u(x_2) = u(\mathbf{250}) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.

Réponse: x_2= $\mathbf{100}$

Encodage d'une fonction d'utilité

x	0	250	1000
$v(x)$	0	0.5	1

Quel valeur de x_2 pour avoir: $(x_2, 1) \sim (\mathbf{250}, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_2) = u(\mathbf{250}) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.
Réponse: $x_2 = \mathbf{100}$

Quel valeur de x_6 pour avoir: $(x_6, 1) \sim (1000, 0.5; \mathbf{250}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_6) = u(1000) \times 0.5 + u(\mathbf{250}) \times 0.5 = 0.75$.
Réponse: $x_6 = \mathbf{500}$

Encodage d'une fonction d'utilité

x	0	250	1000
$v(x)$	0	0.5	1

Quel valeur de x_2 pour avoir: $(x_2, 1) \sim (\mathbf{250}, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_2) = u(\mathbf{250}) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.
Réponse: $x_2 = \mathbf{100}$

Quel valeur de x_6 pour avoir: $(x_6, 1) \sim (1000, 0.5; \mathbf{250}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_6) = u(1000) \times 0.5 + u(\mathbf{250}) \times 0.5 = 0.75$.
Réponse: $x_6 = \mathbf{500}$

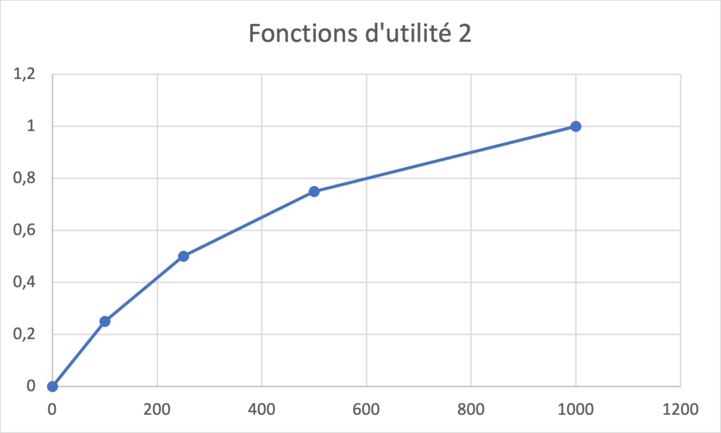
Contrôle:

- On doit avoir $(250, 1) \sim (100, 0.5; 500, 0.5)$

x	0	100	250	500	1000
$v(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1

Exemple

x	0	100	250	500	1000
$v(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1



Exemple

x	0	**100**	250	500	1000
$v(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_1 pour avoir: $(x_1, 1) \sim (\mathbf{100}, 0.5; 0, 0.5)$?

On sait que $1 \times u(x_1) = u(100) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.125$.

Réponse: $x_1 = \mathbf{40}$

Exemple

x	0	**100**	250	500	1000
$v(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_1 pour avoir: $(x_1, 1) \sim (\mathbf{100}, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_1) = u(100) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.125$.
Réponse: $x_1 = \mathbf{40}$

Quel valeur de x_3 pour avoir: $(x_3, 1) \sim (\mathbf{100}, 0.5; \mathbf{250}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_3) = u(\mathbf{100}) \times 0.5 + u(\mathbf{250}) \times 0.5 = 0.375$.
Réponse: $x_3 = \mathbf{170}$

Exemple

x	0	**100**	250	500	1000
$v(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_1 pour avoir: $(x_1, 1) \sim (\mathbf{100}, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_1) = u(100) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.125$.
Réponse: x_1= **40**

Quel valeur de x_3 pour avoir: $(x_3, 1) \sim (\mathbf{100}, 0.5; \mathbf{250}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_3) = u(\mathbf{100}) \times 0.5 + u(\mathbf{250}) \times 0.5 = 0.375$.
Réponse: x_3= **170**

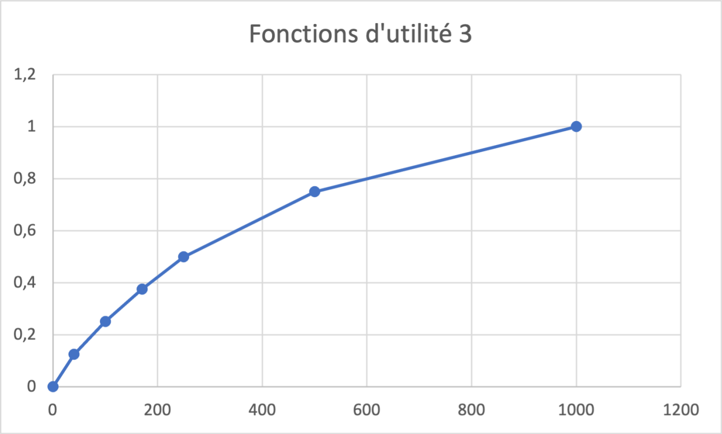
Contrôle:

- On doit avoir $(100, 1) \sim (40, 0.5; 170, 0.5)$

x	0	40	100	170	250	500	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.75	1

Exemple

x	0	40	100	170	250	500	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.75	1



Exemple

x	0	40	100	170	250	**500**	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_5 pour avoir: $(x_5, 1) \sim (250, 0.5; \mathbf{500}, 0.5)$?

On sait que $1 \times u(x_5) = u(250) \times 0.5 + u(\mathbf{500}) \times 0.5 = 0.0.625$.

Réponse: $x_1 = \mathbf{350}$

Exemple

x	0	40	100	170	250	**500**	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_5 pour avoir: $(x_5, 1) \sim (250, 0.5; \mathbf{500}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_5) = u(250) \times 0.5 + u(\mathbf{500}) \times 0.5 = 0.0.625$.
Réponse: x_1= **350**

Quel valeur de x_7 pour avoir: $(x_7, 1) \sim (\mathbf{500}, 0.5; 1000, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_3) = u(\mathbf{500}) \times 0.5 + u(1000) \times 0.5 = 0.875$.
Réponse: x_7= **700**

Exemple

x	0	40	100	170	250	**500**	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_5 pour avoir: $(x_5, 1) \sim (250, 0.5; \mathbf{500}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_5) = u(250) \times 0.5 + u(\mathbf{500}) \times 0.5 = 0.0.625$.
Réponse: $x_1 = \mathbf{350}$

Quel valeur de x_7 pour avoir: $(x_7, 1) \sim (\mathbf{500}, 0.5; 1000, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_3) = u(\mathbf{500}) \times 0.5 + u(1000) \times 0.5 = 0.875$.
Réponse: $x_7 = \mathbf{700}$

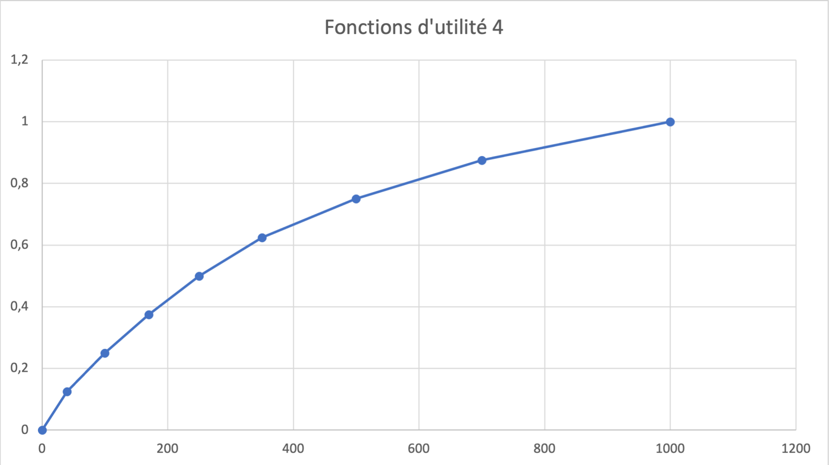
Contrôle:

- On doit avoir $(500, 1) \sim (350, 0.5; 700, 0.5)$

x	0	40	100	170	250	350	500	700	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1

Exemple

x	0	40	100	170	250	350	500	700	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1



Encodage d'une fonction d'utilité

Conseils:

- Utiliser des probabilités simples : 1/2, 1/3, 1/4
- Interroger par encadrements successifs
- Vérifications indispensables

Limites

- Effet de référence
- Paradoxe d'Allais

Difficultés - Effet de référence

Présentation 1 : diminution du nombre de mort

Niveau actuel de mortalité $= 500$ morts/an:

- Choix A : diminuer ce nombre de 500 $(1/2)$ ou de 0 $(1/2)$
- Choix B : diminuer ce nombre de 400 $(1/2)$ ou de 100 $(1/2)$

majorité des médecins : $B \succ A$

Présentation 2 : nombre de mort

- Choix A : nombre de mort 500 $(1/2)$ ou 0 $(1/2)$
- Choix B : nombre de mort 400 $(1/2)$ ou de 100 $(1/2)$

majorité des médecins : $A \succ B$

Paradoxe d'Allais

Choix 1:

$A : (10000\$, 1)$
$B : (15000\$, 0.9; 0\$, 0.1)$
La majorité des personnes préfèrent A à B.

Choix 2:

$C : (10000\$, 0.1; 0\$0.9)$
$D : (15000\$, 0.09; 0\$, 0.91)$
La majorité des personnes préfèrent D à C.

Paradoxe d'Allais

Choix 1:

A : $(10000\$, 1)$
B : $(15000\$, 0.9; 0\$, 0.1)$
La majorité des personnes préfèrent A à B.

Choix 2:

C : $(10000\$, 0.1; 0\$0.9)$
D : $(15000\$, 0.09; 0\$, 0.91)$
La majorité des personnes préfèrent D à C.

MAIS
C : $(A, 0.1; 0\$, 0.9)$
D : $(B, 0.1; 0\$, 0.9)$
$\longrightarrow$ Violation de l'axiome d'indépendance.

Contexte

- Impossibilité de prévoir avec certitude les conséquences de la mise à exécution d'une décision.
- Absence de probabilités claires.
- La Nature décide de tout ce qui n'est pas sous notre contrôle.
- Les conséquences de nos décisions dépendent à la fois de nos choix et des décisions de la Nature ("états de la Nature" ou "scénarios").

Problème

- Comment choisir une action avant d'avoir connaissance de la décision de la Nature ?

Modélisation

Ensembles et Fonction

- A: ensemble d'actions. Un élément $a \in A$ représente une action possible à exécuter.
- E: ensemble d'états de la nature. Un élément $e \in E$ représente une décision que la Nature peut prendre, influençant les conséquences des actions.
- X: ensemble de conséquences.
- c: fonction de conséquence, associant à chaque couple $(a, e) \in A \times E$ un élément de X.

Exemple : Confection d'une omelette

L'omelette

- $A = \{\text{Saladier}, \text{Poubelle}, \text{Bol}\}$
- $E = \{\text{Bon}, \text{Mauvais}\}$

Fonction de conséquence c

	Bon	**Mauvais**
Saladier	O. de 6	Pas d'O.
Poubelle	O. de 5	O. de 5
Bol	O. de 6 + Bol à laver	O. de 5 + Bol à laver

Exemple : Confection d'une omelette

Remarques

- Pas de probabilités.
- Basé sur les goûts et croyances.
- Possibilité d'acquérir de l'information (expérimentation).

Exemple : Préférences et Critères Classiques

Espace des conséquences $X = \mathbb{R}$

La préférence croît avec les valeurs (€).

Fonction de conséquence c

c(a,e)	e_1	e_2	e_3
a_1	40	70	-20
a_2	-10	40	100
a_3	20	40	-5

Critères classiques

Aucune information concernant la vraisemblance relative des divers états de la Nature.

Dominance et Actions Efficaces

Définition de la Dominance

Une action $a \in A$ domine strictement une action $b \in A$ $(a\,D\,b)$ si :

- $c(a, e) \geq c(b, e), \forall e \in E,$
- $\exists e \in E$ tel que $c(a, e) > c(b, e)$.

Une action $a \in A$ est dite efficace si elle n'est dominée par aucune autre action de A.
Lorsque A et E sont finis, l'ensemble des actions efficaces $A^* \subseteq A$ est défini par :

$$A^* = \{a \in A : \nexists b \in A \text{ tel que } b\,D\,a\}$$

et est toujours non vide.

Dominance : Remarques Importantes

Remarques

- Si une action a domine strictement une action b ($a\ D\ b$), alors a est préférée à b, indépendamment de la vraisemblance relative des différents états de la Nature.
- Dans les problèmes réels, il est rare qu'une action domine strictement une autre, résultant souvent en $A^* = A$.
- Se restreindre uniquement à l'ensemble A^* peut être non pertinent, surtout si l'on a des doutes sur la faisabilité des actions dans A.
- L'ensemble A^* peut exclure des alternatives valables qui sont de "brillants seconds", importantes à considérer en pratique.
- Les difficultés rencontrées dans l'identification d'actions dominantes ou efficaces sont similaires à celles rencontrées dans l'analyse multicritère

Exemple : Dominance et "Brillants Seconds"

Fonction de conséquence c

c(a,e)	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
a	100	100	100	100	100	100
b	99	99	99	99	99	99
c	100, 5	0	0	0	0	0
d	0	100, 5	0	0	0	0

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $A^* = \{a, c, d\}$ car $a\ D\ b$

Bien que b soit dominé par a et donc exclu de A^*, b reste un "brillant second" en raison de ses performances presque équivalentes à a sur tous les états de la nature.

Critère de Wald (Max Min)

Prudence : Fonder son choix sur la situation la pire. On choisit l'action $a \in A$ qui maximise le minimum des conséquences possibles :

$$\max_{a \in A} \min_{e \in E} c(a, e)$$

Exemple

Considérons trois actions a_1, a_2, et a_3 avec leurs conséquences dans différents états de la nature et le minimum de ces conséquences :

c(a,e)	e_1	e_2	e_3	min
a_1	40	70	-20	-20
a_2	-10	40	100	-10
a_3	20	40	-5	-5

Selon le critère de Wald, on choisit a_3 car elle présente la perte maximale la moins élevée (-5), comparée à a_1 (-20) et a_2 (-10).

Remarques sur le Critère de Wald

Limites du Critère de Wald

- Aucune compensation entre les états
- Prime au statu quo
- Suppose seulement que X est ordonné.

Exemple Illustratif

Considérons deux actions a et b avec leurs conséquences dans 1000 états de la nature :

c(a,e)	e_1	e_2	e_3	$\cdots$	e_{1000}
a	-100	10 000	10 000	$\cdots$	10 000
b	-99	-99	-99	$\cdots$	-99

Selon le critère de Wald, b serait préférée à a malgré le fait que a ait de bien meilleures conséquences dans presque tous les états, à l'exception du pire cas.

Critère du Max Max

Optimisme : Fonder son choix sur la meilleure situation possible. On choisit l'action $a \in A$ qui maximise le maximum des conséquences possibles :

$$\max_{a \in A} \max_{e \in E} c(a, e)$$

Exemple

Considérons trois actions a_1, a_2, et a_3 avec leurs conséquences dans différents états de la nature et le maximum de ces conséquences :

c(a,e)	e_1	e_2	e_3	max
a_1	40	70	-20	70
a_2	-10	40	100	100
a_3	20	40	-5	40

Selon le critère du Max Max, on choisit a_2 car elle présente le gain maximal le plus élevé (100), comparé à a_1 (70) et a_3 (40).

Remarques sur le Critère Max Max

Limites du Critère Max Max

- aucune compensation possible entre les conséquences sur les divers états de la nature
- suppose seulement que X est ordonné.

Critère de Hurwicz

Compromis entre prudence et optimisme. Avec un coefficient de pessimisme $\alpha \in [0;1]$, on choisit l'action $a \in A$ qui maximise la combinaison pondérée du minimum et du maximum des conséquences :

$$\max_{a \in A} \left[\alpha \min_{e \in E} c(a,e) + (1-\alpha) \max_{e \in E} c(a,e) \right]$$

Exemple avec $\alpha = 1/2$

c(a,e)	e_1	e_2	e_3	min	max	$\alpha = 1/2$
a_1	40	70	-20	-20	70	25
a_2	-10	40	100	-10	100	45
a_3	20	40	-5	-5	40	17.5

Avec $\alpha = 1/2$, le critère de Hurwicz favorise a_2 avec une valeur de $(90/2 = 45)$.

Remarque sur Hurwicz

Limites du Critère de Hurwicz

- Compromis entre deux mauvaises solutions.
- X doit être “au moins” échelle d’intervalle.
- Détermination pratique du coefficient de pessimisme α ?

Critère de Savage (Min Max Regret)

Adapté aux environnements "bureaucratiques" où minimiser le regret est prioritaire. Choisir l'action qui minimise le regret maximum :

$$\min_{a \in A} \max_{e \in E} R(a, e)$$

Idée

Si l'on choisit a_2 et que e_1 survient :

- Meilleure décision possible : a_1 avec 40.
- Décision prise : a_2 avec -10.
- Regrets : $40 - (-10) = 50$.

	e_1	e_2	e_3
a_1	40	70	-20
a_2	-10	40	100
a_3	20	40	-5

Exemple avec le Critère de Savage

c(a,e)	e_1	e_2	e_3
a_1	40	70	-20
a_2	-10	40	100
a_3	20	40	-5

R	e_1	e_2	e_3	max
a_1	0	0	120	120
a_2	50	30	0	50
a_3	20	30	105	105

Choisir a_2 (regret maximum 50) contre a_1 (120), a_3 (105).

Remarques

- Ce critère est distinct du Max Min, qui choisirait a_3.
- X doit avoir une structure permettant de légitimer les différences pour mesurer adéquatement les regrets.
- Le choix dépend de l'ensemble des actions A. L'ajout de nouvelles actions peut modifier le choix de façon imprévisible.

Impact de l'Ajout de Nouvelles Actions

Exemple Initial: Choix de a_1 (regret max 4).

c(a,e)	e_1	e_2
a_1	8	0
a_2	2	4

	e_1	e_2	max
a_1	0	4	4
a_2	6	0	6

Exemple avec Ajout de a_3: Choix initial de a_1, puis choix de a_2 après ajout de a_3.

	e_1	e_2
a_1	8	0
a_2	2	4
a_3	1	7

	e_1	e_2	max
a_1	0	7	7
a_2	6	3	6
a_3	7	0	7

Critère de Laplace

Principe de “ raison insuffisante ” : En absence d'information pour privilégier un état de la nature, tous sont considérés comme également probables.
Choisir l'action $a \in A$ qui maximise la moyenne des conséquences sur tous les états de la nature :

$$\max_{a \in A} \sum_{e \in E} \frac{1}{|E|} c(a, e)$$

Exemple

	e_1	e_2	e_3	Moyenne
a_1	40	70	-20	90/3
a_2	-10	40	100	130/3
a_3	20	40	-5	55/3

Selon le critère de Laplace, on choisit a_2 car elle présente la meilleure moyenne des conséquences (130/3).

Limite du critère de Laplace

- X doit être “au moins” une échelle d’intervalle.
- Soit vous deviendrez Président.e de la république soit non. Peut-on pour autant considérer que ces deux états sont également vraisemblables ?
- Critère sensible au choix, généralement arbitraire, du nombre des états de la Nature considéré (E peut toujours se subdiviser : “ E et il pleuvra demain ” et “ E et il ne pleuvra pas demain ”)
- L’espérance de gain est-elle un bon critère de choix même en supposant tous les états également vraisemblables ?

Exemple de Synthèse des Critères de Décision

c(a, e)	e_1	e_2	e_3	e_4
a	2	2	0	1
b	1	1	1	1
c	0	4	0	0
d	1	3	0	0

Résultats selon différents critères

- **Wald (Mas Min)** : Choix de b
- **Max Max** : Choix de c
- **Laplace** : Choix de a
- **Savage (Min Max Regret)** : Choix de d

Conclusion sur les Critères Classiques de Décision

Limites des Critères Classiques

- Aucun des critères présentés n'est satisfaisant.
- Ils mettent en lumière la nécessité de modéliser la vraisemblance des divers états de la nature (croyances) et la désirabilité des conséquences (goûts).

Questions Centrales

- Pourquoi l'absence de probabilités dans certains contextes ? Quelles sont les limites de cette approche ?
- D'où viennent les probabilités ? Comment sont-elles déterminées ou estimées dans la pratique ?

Probabilité

Expérience aléatoire

Expérience dont on ne peut prévoir le résultat avec certitude avant de l'effectuer.

Exemples

- Jet d'une pièce de monnaie
- Cours du euro/dollar dans un an
- Ventes au cours du mois prochain

Définitions Fondamentales en Théorie des Probabilités

Définition

S: Ensemble des Événements Élémentaires : L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

- Jet d'une pièce : $S = \{\text{Pile, Face}\}$
- Jet de dé : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Cours du \$ / € dans un an : $S = \mathbb{R}^+$

$\mathcal{S}$: Ensemble des Événements construit sur la base de S.

Propriétés

- Si S est l'ensemble des événements élémentaires, alors $S \in \mathcal{S}$
- Si $A \in \mathcal{S}$, alors le complément de A, noté $S \setminus A$, appartient aussi à $\mathcal{S}$
- Si $A, B \in \mathcal{S}$, alors l'union de A et B, notée $A \cup B$, appartient à $\mathcal{S}$

Définition de la Probabilité

Fonction de Probabilité P

Une probabilité P est une fonction définie sur l'ensemble des événements $\mathcal{S}$, avec des valeurs dans $\mathbb{R}$, qui associe à chaque événement A une probabilité $P(A)$, selon les propriétés suivantes :

1. $P(A) \geq 0$ pour tout $A \in \mathcal{S}$
2. $P(S) = 1$ où S est l'ensemble des événements élémentaires
3. Si $A \cap B = \emptyset$ (c'est-à-dire que A et B sont mutuellement exclusifs), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

D'où viennent les Probabilité

Deux écoles:

- École "logico-fréquentiste"
- École "subjectiviste"

École Classique: Perspective Logique

Source Logique

- Principe de " raison insuffisante" : En l'absence d'informations favorisant un événement sur un autre, tous les événements sont considérés comme également probables.
- Exemple : Pour un jet de pièce équilibrée, $P(\text{Pile}) = P(\text{Face}) = \frac{1}{2}$.
- Calcul de la probabilité : $P(E) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$.

Problèmes et Limitations

- Restriction aux " objets parfaits " (ex. : pièces parfaitement équilibrées, dés non biaisés).
- Problème de preuve : Comment s'assurer qu'un objet est "parfait " ?
- Portée limitée en pratique : Difficulté à appliquer pour des événements complexes (ex. : prévoir le cours du $\$/€$ dans un an).

École Classique : Perspective Fréquentiste

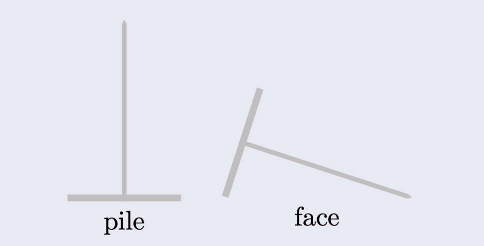
Loi des Grands Nombres

- Pour un grand nombre n de répétitions identiques et indépendantes d'un événement E de probabilité p, la fréquence relative de E se rapproche de p à mesure que n augmente.
- Formellement : $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n(E)}{n} - p\right| > \epsilon\right) = 0$, où $n(E)$ est le nombre de fois où E se produit et ϵ est un petit nombre positif.

Problèmes et Limitations

- Évènements non “ répétables ”.
- Problème de preuve (passé = avenir).
- résultats diffèrent si répétitions identiques ? (“ Dieu joue-t-il aux dés ? ”).
- Circularité de la définition de la fréquence avec l'erreur de mesure exprimée comme une probabilité (ϵ).

École Classique : Perspective Fréquentiste



Exemple: clou de tapissier

- Vous gagnez 10,000 euros si "pile"
- Vous perdez 5,000 euros si "face"

Question: allez-vous accepter de faire 1,000 jets du clou de tapissier avant de vous décider ?

École Subjectiviste de la Probabilité

Faits Clés

- Deux personnes différentes et également rationnelles peuvent avoir des jugements de probabilité différents sur le même événement.
- L'expérience peut transformer les jugements de probabilité, même si les expériences sont indépendantes. Exemple.
- Le langage courant offre une grande richesse pour qualifier la vraisemblance d'un événement.

Définition : Probabilité Subjective

- Une probabilité subjective est la mesure personnelle et intérieure qu'un individu attribue à la vraisemblance d'un événement, basée sur ses propres croyances, connaissances et expériences.

Richesse du Langage pour exprimer les probabilité subjective

Expressions Communes

J'en suis persuadé.
C'est certain.
C'est sûr.
C'est probable.
C'est possible.
Éventuellement incertain.
Douteux.
Étonnant.
Grosse surprise.
Impossible.
Irréalisable.
J'en mettrai ma main à couper.

Probabilités Subjectives

Problèmes

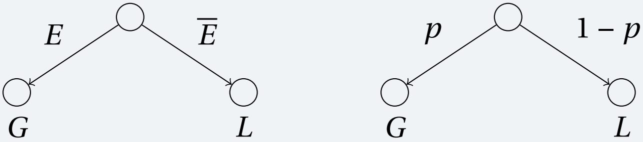
- Pourquoi des probabilités ? Référence aux axiomes de Kolmogorov.
- Comment mesurer de telles probabilités subjectives ?

Idée

Accepter de comparer des paris “ incertains ” avec des paris “ risqués ”, où les probabilités sont issues d’un mécanisme aléatoire incontestable comme les cartes, dés, urnes, etc.

Comparaison de Loteries et Probabilité Subjective

Comparaisons: $\prec, \sim \succ$



Hypothèse

Selon la préférence pour la première loterie sur la seconde, on aura $P(E) > p$ ou $P(E) < p$. La probabilité subjective de l'événement E est la valeur p qui rend une personne indifférente entre ces deux loteries.

Résultats

Idée

- ajouter à $L(X)$ des loteries incertaines
- imposer les axiomes A1-A5 (modifiés) sur ce nouvel ensemble

Théorème (Savage, Aunscombe-Aumann)

- Il existe une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ et une mesure de probabilité P sur S telle que la comparaison de deux loteries (risquées ou incertaines) se ramène à la comparaison de leurs espérances d'utilité (p pour les loteries risquées et P pour les loteries incertaines).
- La mesure de probabilité est unique. La fonction d'utilité est définie à l'origine et à l'unité près.

Résultat

Interprétation

goûts : u (subjectifs)

croyances : P (subjectives)

Conséquences

Même analyse que dans le cas risqué en remplaçant “ probabilités ” par “ probabilités subjectives ”

Problème : Paradoxe d'Ellsberg

Expérience avec des boules dans une urne:

- 90 boules au total : 30 Rouges, et 60 Noires ou Jaunes.

Paris proposés :

- $a1$: Gagner 100$ si Rouge ou $a2$: Gagner 100$ si Noire.
- $a3$: Gagner 100$ si Rouge ou Jaune ou $a4$: Gagner 100$ si Noire ou Jaune.

Résultats observés :

- Majorité des sujets préfèrent $a1$ à $a2$ et $a4$ à $a3$.
- Cette préférence est incompatible avec une préférence SEU (Subjective Expected Utility).

Analyse du Paradoxe d'Ellsberg

- Espérance d'utilité pour $a1$ et $a2$:
  - $E[u(a1)] = P(R)u(100)$
  - $E[u(a2)] = P(N)u(100)$
  - Préférer $a1$ à $a2$ implique $P(R) > P(N)$
- Espérance d'utilité pour $a3$ et $a4$:
  - $E[u(a3)] = P(R)u(100) + P(J)u(100)$
  - $E[u(a4)] = P(N)u(100) + P(J)u(100)$
  - Préférer $a4$ à $a3$ implique $P(N) > P(R)$
- Cette incohérence révèle une aversion à l'ambiguïté.

	R	N	J
$a1$	100	0	0
$a2$	0	100	0
$a3$	100	0	100
$a4$	0	100	100

Difficulté

Heuristique et biais

- surconfiance
- ancrage
- similarité
- disponibilité
- perception de l'aléatoire

Surconfiance

Combien d'œufs ont été produits aux États-Unis en 1965 (en millions) ?

Surconfiance

Combien d'œufs ont été produits aux États-Unis en 1965 (en millions) ?

Analyse: Production d'œufs aux U.S.A. en 1965

- Estimation donnée : 64 588 millions
- Calcul simplifié :
  - 200 millions d'habitants
  - 365 jours par an
  - 1 œuf par jour par personne
- Résultat : ≈ 73000 millions d'œufs par an

Idée Principale

Une combinaison de valeurs plausibles ne doit pas être considérée comme invraisemblable.

Surconfiance

Quel est le nombre d'objets (lettres, paquets, etc.) acheminés par les PTT en France en 1985 (en millions)?

Analyse: Nombre d'objets (lettres, paquets, etc.) achemin es par les PTT en France en 1985

- Estimation donnée : 15 940 millions
- Calcul simplifié :
  - 50 millions d'habitants
  - 365 jours par an
  - 1 lettre/jour/personne
- Résultat : ≈ 18250 millions d'objets par an

Idée Principale

Une combinaison de valeurs plausibles ne doit pas être considérée comme invraisemblable.

Surconfiance

Déclarations

- *Heavier-than-air flying machines are impossible*
  Lord Kelvin, President of the British Royal Society, 1895
- *A severe depression like that of 1920–21 is outside the range of probability*
  Harvard Economic Society, 16 November 1929

Ancrage

Idée

Pour réaliser une estimation, on utilise souvent l'heuristique suivante :

- On recherche dans la mémoire une situation semblable (Ancrage).
- On ajuste pour tenir compte des spécificités de la situation actuelle (Ajustement).

Heuristique: Ancre + Ajustement.

- Manipulations possibles de l'ancre
- Insuffisance de l'ajustement.

Calcul mental

Condition 1

- Temps requis: 5 secondes.
- Évaluation de 8!: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2,250.$

Condition 2

- Temps requis: 5 secondes.
- Évaluation de 8!: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 512.$

$8! = 40320$

Similarité

Portrait

Voici le portrait rapide établi par un psychologue d'une personne de nationalité française :

- Paul a 35 ans.
- Sa vue n'est pas excellente : il porte des lunettes.
- Il est plutôt introverti voire timide.
- Il marche un peu voûté et parle avec le sourire.
- Paul est fort aimable et s'exprime avec aisance.
- Il aime l'ordre et le rangement.

Question

Selon vous, Paul est-il avocat, libraire, médecin ou agriculteur, sachant que l'on est certain qu'il exerce une de ces professions ?

Idée

Pour réaliser une estimation, on se fonde souvent sur des situations "similaires" à celle que l'on doit juger. Cette similarité fait largement appel à des stéréotypes:

$$P(A/B) = f(\text{degré avec lequel } A \text{ ressemble à } B)$$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

Similarité - Analyse

La réponse modale est “Libraire” (le stimulus correspond à l’“ archétype ” d’un libraire).

Hypothèses

- $P(S/L) = 0,9$: Probabilité que le stimulus soit perçu comme correspondant à un libraire.
- $P(S/Ag) = 0,1$: Probabilité que le stimulus soit perçu comme correspondant à un agriculteur.
- $P(L) = 0,0005$: Probabilité de trouver un libraire (600 librairies générales en France).
- $P(Ag) = 0,015$: Probabilité de trouver un agriculteur (3% dans la pop active).

Conclusion

- $P(L/S) = \frac{P(L)P(S/L)}{P(S)} = 0,00045/KP(S)$
- $P(Ag/S) = \frac{P(Ag)P(S/Ag)}{P(S)} = 0,0015/KP(S)$

Similarité

Question

Classer ces événements par ordre de vraisemblance:

- A : Tirer une boule R d'une urne 50 R/50N
- B : Tirer 7 fois de suite une boule R d'une urne 90R/10N
- C : Tirer au moins une R dans 7 tirages dans une urne 10R/90N

Similarité

Question

Classer ces événements par ordre de vraisemblance:

- A : Tirer une boule R d'une urne 50 R/50N
- B : Tirer 7 fois de suite une boule R d'une urne 90R/10N
- C : Tirer au moins une R dans 7 tirages dans une urne 10R/90N

Réponse modale: B $\succ$ A $\succ$ C

$P(C) = (1 \times 0,9)^7 = 0,521$
$P(B) = 0,97 = 0,478$
$P(A) = 0,5$

Similarité

Question : Classer ces événements par ordre de vraisemblance

Linda a 26 ans. Elle est américaine. C'est une femme brillante et active. Elle a obtenu un MBA d'une université prestigieuse. Durant ses etudes elle a été très active dans divers mouvements féministes en anti-racistes.

- a) Linda est institutrice
- b) Linda travaille dans une librairie et fait du Yoga
- c) Linda est active dans le mouvement écologiste
- d) Linda est assistante sociale
- e) Linda est banquière
- f) Linda vend des polices d'assurance
- g) Linda est membre de la NAACP
- h) Linda est banquière et active dans le mouvement écologiste

Similarité

Question : Classer ces événements par ordre de vraisemblance

Linda a 26 ans. Elle est américaine. C'est une femme brillante et active. Elle a obtenu un MBA d'une université prestigieuse. Durant ses etudes elle a été très active dans divers mouvements féministes en anti-racistes.

- a) Linda est institutrice
- b) Linda travaille dans une librairie et fait du Yoga
- c) Linda est active dans le mouvement écologiste
- d) Linda est assistante sociale
- e) Linda est banquière
- f) Linda vend des polices d'assurance
- g) Linda est membre de la NAACP
- h) Linda est banquière et active dans le mouvement écologiste

Réponse modale: $h < e < c$