Algorithms M2–Examen 2019–2020

October 26, 2021

Consignes

1. Pour tous vos algorithmes vous devez donner une preuve de correction et calculer leur complexité.
2. Vous pouvez donner des algorithmes déterministes ou probabilistes. Pour les algorithmes probabilistes, il faut calculer la probabilité que l'algorithme ne donne pas la bonne réponse.
3. Vous pouvez cependant utiliser des algorithmes qu'on a vus pendant le cours (comme par exemple des algorithmes de tri) sans besoin de prouver leur correction/complexité.
4. À la fin vous trouverez un annexe qui vous rappelle quelques informations utiles.
5. Cet examen a 6 exercices.

1 Récurrences

Pour les fonctions suivantes, calculer leur complexité asymptotique (en utilisant la notion big-O). Donnez une justification pour vos réponses. (en utilisant le Master Theorem ou une preuve par d'autres moyens). (2 points)

1. $T_1(n) = n^2 + T_1(n/2)$
2. $T_2(n) = 3T_2(n/2) + n$
3. $T_3(n) = 2T_3(n/4) + \sqrt{n}$
4. $T_4(n) = T_4(n-2) + n$

2 Probabilités

On lance deux dès et on obtient deux nombres $X_1, X_2 \in \{1, \ldots, 6\}$. Soit $Y = X_1 \cdot X_2$ et $Z = X_1 + X_2$.

1. Calculer $E[Y]$. (1 point)
2. Calculer $E[X_1 \mid Z = 9]$ (1 point)
3. Calculer $E[X_1 \mid Y = 6]$ (1 point)

3 Nombres mal placés

On construit un tableau aléatoire A de taille n comme suit : chaque élément de A est (indépendamment des autres) choisi parmi l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Soit X une variable aléatoire qui est égale à

$$X = |\{i \mid A[i] \leq i\}|$$

Donc, X est le nombre de positions i du tableau A qui contiennent un élément inférieur ou égale à i.

1. Calculer $E[X]$. (1 point)
2. Calculer $Var[X]$. (1 point)
3. Utiliser l'inégalité de Markov pour donner une borne supérieur pour $Pr[X > 3n/4]$. (1 point)
4. Utiliser l'inégalité de Chebyshev pour donner une borne supérieur pour $Pr[X > 3n/4]$. (1 point)

4 Is Permutation?

On est donné deux tableaux A, B. Chaque tableau contient n entiers. On veut tester si A est une permutation de B, c'est-à-dire, si chaque élément de A paraît en B avec la même fréquence.

1. Donner un algorithme de complexité $O(n \log n)$. (1 point)
2. Donner un algorithme de complexité $O(n)$. (3 points)

5 Trouver le minimum élément manquant

On a un tableau $A[1 \dots n]$ qui contient n entier positifs **distincts** (donc, pas de doublons). On cherche l'entier positif minimum x tel que $x \notin A$. Par exemple, pour le tableau $A = [2, 4, 1, 5, 6]$ la solution correcte est $x = 3$. **NB:** on a toujours $x \leq n + 1$ (pourquoi ?).

1. Donner le meilleur algorithme possible pour ce problème, si on suppose que A est trié en ordre croissant. (1 point)

   Pour les questions suivantes, on suppose que A ne nous est pas donné trié.

2. Donner un algorithme de complexité $O(n \log n)$ pour ce problème. (1 point)

3. Donner un algorithme de complexité $O(n)$ pour ce problème. (3 points)

6 Surveillance

Le département d'informatique organise une épreuve qui dure T heures. Pour simplicité, on suppose que l'intervalle pendant lequel on organise l'examen est $[0, T]$.

On cherche donc des surveillants. Chaque membre du département est disponible seulement pour un sous-intervalle de $[0, T]$ (à cause d'autres engagements). En plus, si le département demande à un membre de surveiller l'examen, ce membre doit être payé en fonction de son statut.

L'entrée de notre problème est donc un tableau dont chaque ligne a la forme suivante : [Nom, Intervalle de disponibilité, Coût]. Par exemple, on peut envisager l'entrée suivante (pour $T = 5$) :

Nom	Intervalle		Coût
Alice	0	2	20
Bob	0	3	15
Cécile	1	5	40
Diane	2	5	20
Éric	3	5	22

Ce qui veut dire que, par exemple, Alice est disponible pour l'intervalle $[0, 2]$ est, si elle surveille l'examen elle va toucher une prime de 20 euros. Donc, l'équipe de surveillance Alice+Diane est une solution valide, de coût totale 40 euros. L'équipe Alice+Éric n'est pas une solution valide, car elle ne couvre pas l'intervalle $[2, 3]$. La solution Bob+Cécile est également valide (ça ne pose pas de problème si on a deux surveillants pendant l'intervalle $[1, 3]$). La solution optimale est Bob+Diane, car son coût est de 35 euros.

Donner un algorithme qui calcule le coût de la meilleure solution. Formellement, votre algorithme doit trouver un ensemble de lignes du tableau d'entrée tel que

- L'union des intervalles des lignes sélectionnés couvre l'intervalle $[0, T]$.
- Le coût total est minimisé.

(3 points)

Annexe

Probabilités

1. Si X variable aléatoire discrète, $E[X] = \sum_i i \cdot Pr[X = i]$.
2. $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.
3. Union bound : $Pr[A \cup B] \leq Pr[A] + Pr[B]$
4. Probabilité conditionnelle : $Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$
5. Markov : si X variable aléatoire qui ne prend pas de valeurs négatives, alors on a $\forall \alpha > 0, Pr[X \geq \alpha] \leq \frac{E[X]}{\alpha}$.
6. Chebyshev : On a $\forall \alpha > 0, Pr[|X - E[X]| \geq \alpha] \leq \frac{Var[X]}{\alpha^2}$.

Master Theorem

Si $T(n) = aT(n/b) + O(n^d)$ alors

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{if } d > \log_b a \\ O(n^d \log n) & \text{if } d = \log_b a \\ O(n^{\log_b a}) & \text{if } d < \log_b a \end{cases}$$

Autres Rappels

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$