L3 INFO A3INF23
PROBABILITÉS ET PROCESSUS STOCHASTIQUES
PRÉRENTRÉE
Brice Mayag

FEUILLE 0 : NOTIONS DE PROBABILITÉS

Exercice 1 :

Une urne contient dix boules (6 blanches et 4 rouges). On tire au hasard et successivement deux boules de cette urne. Calculer, dans le cas où le tirage est effectué avec remise, puis dans le cas où le tirage est effectué sans remise, les probabilités suivantes :

- probabilité pour que les deux boules soient blanches,
- probabilité pour que les deux boules soient de même couleur,
- probabilité pour que l'une au moins des boules tirées soit blanche.

Exercice 2 :

Pour garantir l'anonymat dans certaines enquêtes par sondage, on introduit le hasard dans les réponses possibles. Admettons que l'on cherche à savoir quelle est la proportion de médecins ayant prescrit illégalement un médicament. On demande alors à chaque médecin interrogé de se retirer dans son cabinet et de jouer à pile ou face de la façon suivante :

- S'il obtient pile, il doit répondre, sincèrement, à la question : "Avez-vous un jour prescrit illégalement un médicament ?"
- S'il obtient face, il doit rejouer et répondre, toujours aussi sincèrement, à la question : "Avez-vous obtenu face au deuxième tirage ?"

Ainsi le médecin donne une seule réponse, "Oui" ou "Non", mais l'enquêteur ne sait pas s'il a répondu à la première ou à la deuxième question. Supposons que la proportion de " Oui " ait été de 41 $\%$. Quelle est la proportion de médecins ayant prescrit illégalement un médicament ?

Exercice 3 :

Dans un tournoi exhibition de tennis, Djokovic doit affronter Nadal et Federer au cours de trois sets successifs où ses deux adversaires alterneront. Il remportera ce tournoi s'il gagne deux sets consécutifs. Il considère que la probabilité p de battre Federer est supérieure à celle q de battre Nadal : $p > q$. Quel adversaire va-t-il choisir d'affronter en premier ?

Exercice 4 :

Dans un village de vacances, trois stages sont proposés aux adultes et aux enfants. Ils ont lieu dans la même plage horaire ; leurs thèmes sont : la magie, le théâtre et la photo numérique.

150 personnes dont 90 adultes se sont inscrites à l'un de ces stages, et parmi les 150 personnes inscrites :

- la magie a été choisie par la moitié des enfants et $20\ \%$ des adultes,
- 27 adultes ont opté pour la photo numérique ainsi que $10\ \%$ des enfants.

Recopier et compléter le tableau suivant :

	Magie	Théâtre	Photo numérique	Total
Adultes				
Enfants				
Total				150

On appelle au hasard une personne qui s'est inscrite à un stage. On utilisera les notations suivantes :
- A l'évènement « la personne appelée est un adulte » ;
- M l'évènement « la personne appelée a choisi la magie » ;
- T l'évènement « la personne appelée a choisi le théâtre » ;
- N l'évènement « la personne appelée a choisi la photo numérique ».

1. (a) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un enfant ?
   (b) Quelle est la probabilité que la personne appelée ait choisi la photo sachant que c'est un adulte ?
   (c) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre ?
   (d) Montrer que la probabilité que la personne appelée soit un adulte ou une personne ayant choisi le théâtre est $0,76$.
2. Le directeur du village désigne une personne ayant choisi la magie. Il dit qu'il y a deux chances sur trois pour que ce soit un enfant. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.

Exercice 5 :

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   - On note A_0 l'événement : « on a obtenu aucune boule noire » ;
   - On note A_1 l'événement : « on a obtenu une seule boule noire » ;
   - On note A_2 l'événement : « on a obtenu deux boules noires ».

   (a) Combien y a t-il de tirages possibles ?
   (b) Calculer les probabilités de $A_0,\ A_1$ et A$_2$.
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne. On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne. On note B l'événement : « on a obtenu une boule noire au tirage n°2 ».
   (a) Calculer $P_{A_0}(B),\ P_{A_1}(B)$ et $P_{A_2}(B)$.
   (b) En déduire que $P(B) = \dfrac{8}{15}$.

Exercice 6 :

Un nouveau vaccin a été testé sur 12500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation.

1. Sachant que ce vaccin a été administré à 680 femmes enceintes, quelle est la probabilité qu'une femme enceinte ait eu ne réaction secondaire si elle reçoit le vaccin ?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne non enceinte ait une réaction secondaire ?

Exercice 7 :

La population de la France, classée par région, à répondu de la façon suivante à un sondage sur son attitude face à la législation du Cannabis : (noter que la somme des proportions est égale à 100 %)

	Pour	Contre
Région IDF	7,8 %	22,2 %
Autres Régions	18,2 %	51,8 %

1. Quelle est la probabilité pour qu'un individu choisi au hasard soit pour la législation ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu de la Région IDF soit pour la législation ?
3. Peut-on dire que les événements "Appartenir à la Région IDF" et "Être pour la législation du Cannabis" sont indépendants ?

Exercice 8

Les cultures de tissus végétaux peuvent être infectées soit par des champignons, soit par des bactéries.

La probabilité d'une infection par un champignon est 15 %. La probabilité d'infection par une bactérie est 8 %.

1. Quelle est la probabilité d'une infection simultanée par champignons et bactéries,
   - dans le cas où les infections sont indépendantes,
   - dans le cas où les infections n'étant pas indépendantes, la probabilité d'infection par les bactéries quand on a une infection par les champignons est égale à 4 %.
2. Calculer la probabilité d'infection quelle qu'en soit l'origine (dans les deux cas proposés ci-dessus)

Exercice 9 :

Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$ avec équiprobabilité des événements élémentaires sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Les événements $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$ et $C = \{a, d\}$ sont-ils indépendants ?

Exercice 10 :

Les événements A et B étant indépendants, montrer que les événements A et $\overline{B}$, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. Si l'événement C est indépendant de A et de B, est-il aussi indépendant de $A \cup B$? L'événement $\overline{C}$ est-il indépendant de $A \cap B$?

Exercice 11 :

Un certain jeu dépend du nombre de points X obtenus en jetant un dé équilibré.

1. Calculer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. Le gain de ce jeu est donné par la fonction linéaire suivante $G = 2X + 8$.
   - Tabuler la distribution de G ;
   - Calculer le gain espéré $E(G)$ et la variance $V(G)$.

Exercice 12 :

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{1 \times 2} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 - \dfrac{1}{2 \times 3} & si \quad 2 \leq x < 3 \\ \dots & \quad \dots \\ 1 - \dfrac{1}{n \times (n+1)} & si \quad n \leq x < n+1 \\ \dots & \quad \dots \end{cases}$$

1. Calculer les probabilités $p_n = P(X = n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 13 :

Les centres de transfusion sanguine diffusent un tableau donnant la répartition en France des principaux groupes sanguins :

	O	A	B	AB
Rhésus +	37%	$38,1\%$	$6,2\%$	$2,5\%$
Rhésus -	7%	$7,2\%$	$1,2\%$	$0,5\%$

1. Dix personnes prises au hasard en France donnent leur sang. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de personnes appartenant au groupe A. On demande de calculer :
$$E(X)\ ;\ V(X)\ ;\ P(X=4)\ ;\ P(X=0)\ ;\ P(X>0).$$
2. Pour une intervention chirurgicale, on doit avoir au moins 3 donneurs de groupe O et de Rhésus +. Dix personnes ignorant leur groupe sanguin sont disposées à ce don. Calculer la probabilité d'avoir au moins les donneurs nécessaires parmi les dix volontaires. (Nous supposerons que les dix volontaires constituent un échantillon aléatoire, c'est-à-dire constitué au hasard. Cette hypothèse ne va pas de soi, même si les volontaires ignorent leur groupe sanguin, car les volontaires viennent peut-être de la famille.)

Exercice 14 :

On considère qu'il apparaît, en moyenne, chaque année 20 nouveaux cas de poliomyélite pour 100 000 habitants. On appelle X le nombre de nouveaux cas de poliomyélite dans l'année, dans une ville de 50 000 habitants (respectivement 5 000 habitants).

1. Montrer que la variable X suit une loi binomiale.
2. Montrer que l'on peut faire ici l'approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson.
3. Calculer la probabilité pour qu'il apparaisse au plus quatre nouveaux cas de poliomyélite :
   (a) dans une ville de 50 000 habitants.
   (b) dans une ville de 5 000 habitants.

Exercice 15 :

1. Vous effectuez un voyage en avion à bord d'un biréacteur qui peut poursuivre son vol avec un seul réacteur qui fonctionne. Les réacteurs fonctionnent de façon indépendantes et ont chacun une probabilité p de tomber en panne au cours du vol. Calculer en fonction de p la probabilité π_B que votre vol ait pu se poursuivre jusqu'à sa destination.
2. Dans le cas d'un quadriréacteur, qui peut poursuivre son vol avec au moins deux réacteurs qui fonctionnent, calculer en fonction de p la probabilité π_Q que votre vol ait pu se poursuivre jusqu'à sa destination.
3. Pour quelles valeurs de p le biréacteur est-il plus sûr que le quadriréacteur ? calculer π_B et π_Q pour $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 16 :

Pour être sélectionné aux Jeux Olympiques, un athlète doit réussir deux fois à dépaser les minima fixés par sa fédération. Il a une chance sur trois de réussir à chaque épreuve à laquelle il participe. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre d'épreuves auxquelles il devra participer pour être sélectionné.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Si cet athlète ne peut participer qu'à quatre épreuves maximum, quelle est la probabilité qu'il soit sélectionné ?

Exercice 17 :

On suppose que la glycémie est distribuée normalement dans la population, avec une moyenne de $1g/l$ et un écart-type de $0,03g/l$. On mesure la glycémie chez un individu.

1. Calculer la probabilité pour que sa glycémie soit :
   (a) inférieure à $1,06$;
   (b) supérieure à $0,9985$;
   (c) comprise entre $0,94$ et $1,08$.
2. On mesure la glycémie chez 1000 individus. Donner le nombre moyen d'individus dont la glycémie est supérieure à $0,99$.

Exercice 18 :

On lance successivement trois pièces de monnaie et les variables aléatoires X et Y désignent respectivement le nombre de *faces* apparues sur les deux premières pièces et le nombre de *piles* sur les deux dernières.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y), puis les lois marginales de X et Y, et indiquer si ces variables aléatoires sont indépendantes.
2. Calculer $Cov(X, Y)$.

Exercice 19 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois :

x	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y	1	2	3
$P(X=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. Calculer
$$E(X)\ ;\ Var(X)\ ;\ E(Y)\ ;\ Var(Y).$$
2. Donner la loi de probabilité conjointe de X et Y.
3. Établir la loi de probabilité de $T = X + Y$. Calculer $E(T)$ et $Var(T)$.
4. Établir la loi de probabilité de $Z = XY$. Calculer $E(Z)$ et $Var(Z)$.
5. Vérifier par le calcul que $Cov(X, Y) = 0$.

Exercice 20 :

X et Y sont deux variables aléatoires ayant le même ensemble de valeurs possibles $\{0; 0.5; 1\}$. La loi du couple est donnée par le tableau suivant :

$Y \setminus X$	0	0.5	1
0	0.1	0.1	0.1
0.5	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.1

1. Calculer les distribution de probabilités marginales de X et Y.
2. Calculer les distribution de probabilités de X conditionnées par l'événement $\{Y = 0.5\}$, puis $\{Y = 1\}$.
3. Calculer les espérances conditionnelles $E(X|Y = 0.5)$ et $E(X|Y = 1)$. En déduire $E(XY)$ et calculer $E(X|Y = 0)$.

Exercice 21 :

Dans une banque, le nombre de chèques émis par les clients chaque jour est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les chèques sont émis indépendamment les uns des autres. Pour un chèque émis, la probabilité pour que ce chèque soit sans provision est $p \in]0, 1[$. On appelle Y la variable aléatoire correspondant au nombre de chèques émis sans provision lors d'une journée.

1. Soit n un entier strictement positif. Montrer que la loi conditionnelle de la variable Y sachant l'événement $\{X = n\}$ est une loi binomiale dont on déterminera les paramètres ;
2. Déterminer la loi du couple (X, Y) ;
3. En déduire la loi de la variable aléatoire Y et calculer son espérance ;
4. Les variables Y et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 22 :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose

$$p_{kn} = P(X = k, Y = n) = \frac{\lambda^k \, e^{-\lambda} \, \alpha^n \, (1-\alpha)^{k-n}}{n!(k-n)!} \, \mathbf{1}_{\{0 \leq n \leq k\}}(k, n)$$

où $\lambda > 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ sont des nombres réels donnés.

1. Quelle est la loi de la variable X ?
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ? X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Z = X - Y$?
4. Pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P(Y = m | Z = n)$. Que peut-on en déduire sur Y et Z ?
5. On fait l'hypothèse que le nombre d'enfants d'une famille, tirée au hasard dans une population donnée est une variable aléatoire de Poisson d'espérance 2.2. On admet qu'à chaque naissance, la probabilité d'observer un garçon est égale à $\frac{1}{2}$.
   (a) Montrer que, conditionnellement au fait que la famille a n enfants, le nombre de garçons suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.
   (b) Quelle est la probabilité pour qu'une famille ainsi choisie contienne a enfants dont b garçons ?
   (c) Que peut-on dire des variables aléatoires représentant le nombre de filles d'une famille choisie au hasard dans la population donnée ?

Exercice 23 :

Une secrétaire étourdie glisse trois lettres qui ne diffèrent que par le nom de leur destinataire dans les trois dernières enveloppes qui lui restent puis cachète les enveloppes avant d'y coller les timbres et les trois étiquettes portant les adresses. On note :

- $E =$ "la lettre tapée la première parvient à son destinataire"
- $F_j =$ "exactement j lettres parviennent à leur destinataire".

Pour chaque indice j, étudier :

1. L'incompatibilité des événements aléatoires E et F_j,
2. L'indépendance des événements aléatoires E et F_j.

Exercice 24 :

Une machine peut être équipée de 2 ou de 4 composants. La probabilité qu'un composant tombe en panne est égale à p avec $0 \leq p \leq 1$ et chaque composant fonctionne indépendamment des autres. On définit les variables aléatoires suivantes :

X est le nombre de composants en panne quand la machine est équipée de 2 composants et Y est le nombre de composants en panne quand la machine est équipée de 4 composants.

1. Quelles sont les lois de probabilité suivies par X et Y ? Exprimer $P([X = k])$ et $P([Y = k])$ en fonction de k.

2. La machine ne fonctionne plus si plus de la moitié des composants tombent en panne.
   (a) Quelle est la probabilité p_2 que la machine ne fonctionne plus quand elle est équipée de 2 composants ?
   (b) Quelle est la probabilité p_4 que la machine ne fonctionne plus quand elle est équipée de 4 composants ?
   (c) Comparer, en fonction de p les probabilités p_2 et p_4. Dans quels cas est-il préférable d'avoir 2 composants plutôt que 4 ?

Exercice 25 :

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule. Les 30 cases blanches (B), jaunes (J), vertes (V) ou rouges (R) ont toutes la même probabilité d'être atteintes. Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros, si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros, si la fléchette atteint une case jaune, le joueur gagne rien et ne perd rien, si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désignant un réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).
   (a) Donner la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer a pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que $E(X)$ soit nulle).
2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.
   (a) Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?
   (b) Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ? exactement 5 fois ? Quel est le nombre moyen de parties gagnantes ?

Exercice 26 :

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 découpent des pièces métalliques identiques. M_1 fournit 60% de la production (parmi lesquelles $6,3\%$ sont défectueuses), le reste étant fourni par M_2 (dont 4% de la production est défectueuse).

La production du jour est constituée des pièces produites par les deux machines, et on en tire en fin de soirée une pièce au hasard (tous les prélèvements sont supposés équiprobables).

1. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?
2. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?
3. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?

Exercice 27 :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. On note Y une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur le même espace probabilisé (Ω, P) que X, telle que, $\forall i, j \in \mathbb{N}$,

$$P(Y = j | X = i) = \begin{cases} P(Y = j) & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ 0 & \text{si } |i - j| = 1 \\ \dfrac{\lambda^{i-1}\left[\lambda^2 + \lambda(i+1) + i(i+1)\right] e^{-\lambda}}{(i+1)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y.

Exercice 28 :

Une enquête est effectuée auprès de familles de 4 personnes afin de connaître leur achat de lait en 1 mois. Sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation de ce produit forme une population gaussienne avec une moyenne de 20 L et un écart-type de 6.

En vue d'une conception d'une campagne de pub, on souhaite connaître le pourcentage des faibles consommateurs (c'est-à-dire moins de 10 L/mois) et le pourcentage des grands consommateurs (c'est-à-dire plus de 30 L/mois).

1. Calculer ces 2 pourcentages.
2. Au-dessous de quel nombre de litres achetés se trouvent 75% des consommateurs ?
3. Combien de litres au maximum consomme la moitié des consommateurs ?
4. Au-dessus de quelle consommation se trouve 1/3 de la population ? et 2/3 de la population ?