

---

# Chapitre III

## ANALYSE ET CHOIX DE PROJETS D'INVESTISSEMENT

---

On a indiqué que les décisions stratégiques sont relatives au positionnement désiré par l'entreprise à long terme, c'est-à-dire à la définition cohérente en composition et volume de son portefeuille de produits et de services qu'elle désire mettre sur le marché et du portefeuille de ressources permanentes physiques, humaines et informationnelles qu'elle entend mobiliser pour réaliser cette offre. Le [chapitre II](#) est dédié aux décisions liées au choix du portefeuille de produits, celui-ci traite de l'adaptation du portefeuille de ressources à travers des projets d'investissement<sup>1</sup>. Les décisions stratégiques relatives au portefeuille de produits et la définition des ressources permanentes ne sont, pas indépendantes.

Après avoir présenté rapidement ([section I](#)) les décisions stratégiques de production et les outils permettant de comprendre le fonctionnement d'un système productif, nous examinerons les problèmes qui se posent lors de l'analyse économique d'un projet d'investissement ([section II, page 170](#)) puis nous discuterons ([section III, page 199](#)) le problème de la sélection de projets d'investissement rentrant dans un programme d'investissement établi sous contrainte budgétaire. Enfin, nous examinerons ([section IV, page 228](#)) certains problèmes technico-économiques se posant à l'occasion de la définition d'un projet ou d'un programme d'investissement.

Table des  
matières

Index  
thématique

### SECTION I PRÉSENTATION DES DÉCISIONS STRATÉGIQUES ET DES TECHNIQUES DE MODÉLISATION DU FONCTIONNEMENT D'UN SYSTÈME PRODUCTIF

On examinera d'abord sur quoi portent les décisions stratégiques de l'entreprise relatives à ses ressources permanentes (§ I-1). Pour prendre les bonnes décisions modifiant la conception du système productif, il est indispensable d'appréhender correctement le fonctionnement du système productif à adapter. Pour ce faire, un certain nombre de techniques de modélisation sont disponibles et seront présentées au § I-2, page 147.

---

1. Rappelons que les démarches d'amélioration continue transforment progressivement les caractéristiques d'un système productif (voir la présentation du *kaizen* faite au § I-3.2.1, page 70, du [chapitre I](#)) et jouent un rôle important dans l'amélioration de la performance de l'entreprise. Cela étant, l'investissement constitue souvent la seule possibilité d'adaptation d'un système productif à des transformations importante, de l'environnement technico-économique, ce que ne contestent nullement d'ailleurs les tenants du *kaizen*.

## I-1 Décisions stratégiques relatives aux ressources permanentes

Seules les grandes sociétés créent *ex nihilo* de nouveaux systèmes productifs d'une certaine taille. D'une manière générale, on assiste à une adaptation progressive des systèmes existants et à l'évolution des missions qui leur sont assignées. L'acquisition (ou la radiation) d'une ressource permanente de l'entreprise doit s'effectuer en accord avec une vision stratégique cohérente dans laquelle toutes les fonctions de l'entreprise sont impliquées<sup>1</sup>. Cette transformation du système productif s'effectue à l'occasion d'une modification du portefeuille d'activités ou dans le cadre d'une recherche d'amélioration de certains processus.

Les ressources mobilisées n'appartiennent pas toutes à l'entreprise. Dans de nombreuses entreprises, comme celles de l'automobile, la valeur ajoutée en provenance de l'extérieur dépasse 70%. Une première décision porte donc sur ce que l'on décide de fabriquer en interne et ce que l'on externalise sous forme de sous-traitance et d'approvisionnement (§ I-1.1). La production interne fait appel à des équipements (§ I-1.2), du personnel (§ I-1.3, page 145) et des informations (§ I-1.4, page 146). On évoquera enfin (§ I-1.5, page 147) le problème de la flexibilité du système productif, telle qu'elle résulte de la combinaison des ressources mobilisées.

### I-1.1 Sous-traitance et approvisionnement

En règle générale, une entreprise ne fabrique pas l'intégralité des produits qu'elle consomme. Outre les matières premières, elle achète ou sous-traite tout ou partie des composants qu'elle utilise. Dans le premier cas – achat – les spécifications de produits disponibles sur le marché<sup>2</sup> répondent aux besoins et aucun avantage stratégique (indépendance, qualité, coût, etc.) n'est trouvé à une production interne. Dans le second cas – sous-traitance – l'entreprise définit les spécifications de composants qu'elle fait exécuter par des fournisseurs qui travaillent alors à la commande. Cette **sous-traitance** peut être **de capacité**, l'entreprise estimant peu rentable d'acquérir un complément de ressources en machines et/ou en hommes qui ne serait souvent que partiellement utilisé. Cette **sous-traitance** peut être également **de spécialité**, l'entreprise estimant ne pas disposer des compétences techniques et/ou de l'outillage spécialisé nécessaire à l'exécution d'un certain travail. Cette frontière entre l'interne et l'externe au système productif n'est pas intangible et l'une des décisions stratégiques peut justement en être le déplacement. L'évolution vers la mise en réseau d'entreprises est une tendance lourde qui s'explique par de nombreux facteurs (voir chapitre I, § I-2.3, page 62).

Une fois décidé ce qui est à la charge du système productif, il faut le dimensionner et le structurer, en cas de création *ex nihilo*, ou en modifier les caractéristiques, en cas d'adaptation d'un système existant. Une série de décisions cohérentes doivent alors être prises quant à l'importance et la nature des ressources permanentes du système. Ces ressources correspondent aux hommes,

1. Ce qui n'implique pas pour autant la cohérence du système productif dans la mesure où ses modifications successives faites pour répondre à des transformations de l'environnement se traduisent par adaptations partielles parfois surcapacitaires, qui permettent une réponse satisfaisante mais pas nécessairement cohérente avec le reste du système productif (en particulier en ce qui concerne les capacités installées et les possibilités de réactivité).

2. On parle encore de **produits sur étagère** (ou *commercial of the shelf*, COTS)

aux machines et aux informations. Les décisions qui les concernent sont largement interdépendantes.

### I-1.2 Équipements

Il faut d'abord se poser la question de savoir si l'on a intérêt à travailler sur une grosse unité de production ou sur plusieurs petites, pouvant éventuellement coexister en un même lieu. L'accroissement de la taille diminue certains coûts directs, mais en contrepartie, ce qui est moins bien perçu, il augmente de nombreux coûts indirects souvent occultés dans les analyses à prédominance technique qui sont habituellement faites sur ce problème (coûts de logistique liés à l'accroissement induit des transports, coûts de coordination liés à l'augmentation de la complexité décisionnelle, etc.) et peut engendrer une dilution des responsabilités.

Chaque unité de production s'organisera<sup>1</sup> en ateliers spécialisés, en lignes de production ou en cellules. L'adaptation à l'évolution du marché explique la mutation de nombreux systèmes de production. Historiquement, de nombreux systèmes sont passés d'une organisation de type «ateliers spécialisés» (voire de type «série unitaire») à une organisation en ligne de production, sous la pression de l'approche «cycle de vie du produit». Assez souvent, un produit nouveau est, au départ, fabriqué à la demande et en petites quantités par un système productif non spécialisé, puis on passe progressivement, en fonction de l'accueil du marché, à une production de produits standardisés, bon marché et en grande quantité, dans des lignes de production. L'évolution observée en micro-informatique illustre bien ce type d'évolution.

Table des  
matières

Index  
thématique

Les composantes du choix des machines se posent en termes de coûts et de performances techniques, mais aussi de polyvalence, de capacité globale installée (sur-dimensionnement voulu pour faire face aux aléas ou à une croissance prévue) et de capacité unitaire, lorsque plusieurs unités sont nécessaires. Ce dernier point implique de choisir entre plusieurs petites machines ou quelques grosses et fait intervenir des considérations de productivité, de flexibilité et de disponibilité. C'est à ce niveau que sont effectués des choix technologiques importants qui conditionnent les gammes et nomenclatures et concernent le degré de sophistication des machines et d'automatisation de tout ou partie du système productif. Il convient, à ce stade, de ne jamais perdre de vue que d'autres ressources productives sont en jeu. La réponse au problème posé doit être cohérente. La fuite en avant sur le plan technologique peut s'avérer catastrophique sur le plan économique, si elle n'est pas pensée globalement.

Un certain nombre de techniques sont disponibles pour aider à la configuration de nouveaux systèmes productifs.

### I-1.3 Personnel

Le personnel de production doit lui aussi être défini avec soin, en cohérence avec le parc des machines disponibles et l'organisation de la production (définition socio-technique des postes de travail). Un arbitrage doit être effectué sur le degré de spécialisation ou de polyvalence des ouvriers sur des opérations de production

1. Voir la présentation générale de ces formes d'organisation au [chapitre I](#), § I-2.2, page 50 et § I-2.2.5.1, page 59.

et de maintenance et sur l'importance et la qualification de l'encadrement technique. L'organisation taylorienne tend à privilégier la spécialisation des compétences et des tâches avec un encadrement numériquement faible; sa contrepartie évidente est une certaine rigidité structurelle du système productif qui s'adapte alors plus lentement aux aléas et aux modifications de la demande à satisfaire. Les organisations s'inspirant des principes du *kaizen*<sup>1</sup> ou du *reengineering*<sup>2</sup> privilégient, au contraire, la polyvalence et l'initiative. Il convient également d'intégrer dans cette réflexion stratégique les possibilités d'ajustement de la capacité aux fluctuations de la charge (possibilité de fluctuation des horaires de présence, appel aux heures supplémentaires ou au travail intérimaire).

### I-1.4 Informations

La dernière ressource permanente est constituée des informations, qu'elles soient techniques, procédurales ou factuelles.

- Les informations techniques correspondent principalement aux gammes et aux nomenclatures. De nombreuses entreprises travaillent encore de manière quasi artisanale dans ce domaine et ne formalisent qu'une faible partie de leur savoir-faire technique, ce qui pose d'évidents problèmes d'ordonnement. La polyvalence accrue de certaines machines augmente de manière considérable la possibilité de travailler sur des gammes alternatives qui ne seront pas toujours explicitées (en fonction d'un arbitrage entre le coût de création d'informations qui ne seront peut-être jamais utilisées et celui d'une création «à chaud» pour régler un problème ponctuel).
- Les informations procédurales correspondent à l'ensemble des procédures (informatisées ou non) utilisées dans le choix et l'affectation des hommes et des équipements. Ces procédures sont mises en œuvre aussi bien pour des décisions opérationnelles (ordonnement, gestion des stocks) que pour des décisions tactiques (planification) ou stratégiques (choix des investissements). Il faut souligner que la définition et l'amélioration de ces procédures relèvent de la stratégie contrairement à leur application. La définition des procédures mises en œuvre dans le cadre de la qualité totale relève également de cette catégorie d'informations<sup>3</sup>.
- Les informations factuelles correspondent, ici, à la description du système productif et à l'utilisation qui en est faite (suivi de production). Le niveau de détail souhaité et la définition des moyens à mettre en œuvre pour obtenir ce résultat relèvent d'une décision stratégique. Il est clair qu'une certaine cohérence lie les informations factuelles, procédurales et techniques.

L'un des choix stratégiques importants est le degré d'intégration de ces catégories d'information, et l'informatique joue un rôle important dans ce domaine. On pourra, dans cette optique, s'orienter vers des systèmes de conception / fabrication assistées par ordinateur (CFAO) et vers les ERP / ERM<sup>4</sup>.

1. Voir le § I, page 41, § I-3.2.1, page 70.

2. Voir le § I, page 41, § I-3.2.2, page 72.

3. Voir le chapitre XIV, page 971.

4. Voir le chapitre XIV, page 957.

### I-1.5 Flexibilité physique et flexibilité organisationnelle

C'est au niveau stratégique que se définit la **flexibilité** d'un système productif, c'est-à-dire sa capacité à s'adapter à des modifications plus ou moins rapides de la demande externe (y compris l'introduction de produits nouveaux) et aux divers aléas, inévitables en production. Il importe de bien voir que cette **flexibilité** peut être obtenue de manière **physique** par l'utilisation de ressources polyvalentes (machines à commande numérique à reprogrammation rapide, opérateurs hautement qualifiés et polyvalents...) et une certaine conception des produits (modularité<sup>1</sup>...), mais aussi de manière **organisationnelle** par le biais d'une amélioration des diverses procédures qui définissent les règles d'utilisation des ressources. La flexibilité d'une entreprise résulte donc d'une combinaison de flexibilité physique et de flexibilité organisationnelle (figure 27).

FIGURE 27  
*Flexibilité globale*



L'acquisition d'un accroissement de flexibilité résulte d'un compromis entre des investissements physiques et des investissements d'amélioration du système d'information – en particulier par la mise en cohérence et l'intégration de systèmes incohérents et indépendants<sup>2</sup> – et/ou des procédures utilisées, en particulier avec l'usage de systèmes interactifs d'aide à la décision (SIAD). Ce compromis résulte des performances et des coûts relatifs de ces deux formes de flexibilité. L'évolution technologique déplace, au cours du temps, la zone de « bon » compromis entre la flexibilité organisationnelle et la flexibilité physique, souvent préférée par les ingénieurs qui en maîtrisent mieux la logique. On peut ajouter que les études d'investissements modifiant sensiblement un système productif s'accompagnent de plus en plus de simulations permettant de tester la performance des nouvelles procédures qu'il est alors souvent nécessaire d'introduire, notamment du point de vue de la flexibilité globale de la nouvelle configuration productive<sup>3</sup>.

Table des  
matières

Index  
thématique

### I-2 La modélisation du fonctionnement d'un système productif

L'accumulation et la transmission du savoir se fondent sur des représentations abstraites de la réalité et sur des outils de manipulation de cette représentation. La **modélisation** procède de cette démarche: dominer le hasard de l'expérience en établissant un système de relations entre un nombre restreint d'entités censées représenter le réel. De très nombreuses représentations sont possibles. Elles correspondent à une certaine grille de lecture du réel, ne prétendant pas épuiser sa complexité.

1. Voir [chapitre II, page 103](#) et sq. On reviendra sur cet aspect de la flexibilité à la [page 589](#) du [chapitre IX](#), où l'on évoquera la nécessité de remonter à la conception des produits pour que différentes familles de produits puissent être produites ou assemblées sur des lignes non spécialisées dans une gamme de produits.

2. Voir le [chapitre XIV, page 957](#), qui traite des ERP / ERM.

3. On reviendra en détail sur ce point au [§ I-2.1, page 148](#).

Deux familles d'outils sont mobilisables pour étayer l'instruction de dossier d'investissement d'une certaine ampleur: les outils de la simulation (§ I-2.1) et ceux de cartographie des flux et des processus (§ I-2.3, page 160). La vision apportée doit être complétée par une vision systémique du système productif comportant une dimension socio-organisationnelle car l'investissement déplace les frontières, les pouvoirs et les rôles (§ I-2.2, page 155). On évoquera enfin comment ces outils d'analyse peuvent être utilisés pour améliorer les processus (§ I-2.4, page 167).

## I-2.1 Les outils de simulation de processus

En gestion, la **simulation** s'appuie sur une certaine représentation du fonctionnement d'un système productif pour en imiter le comportement et la réaction lorsqu'il est soumis à certaines sollicitations (demande, perturbations...) et en évaluer des principales caractéristiques de fonctionnement dans le contexte étudié, afin d'en tirer des conséquences opérationnelles (adaptations éventuelles des ressources en équipements, opérateurs et procédures, contrôle des entrées dans le système...). Après avoir examiné rapidement les principes sur lesquels s'appuient les logiciels de simulation (§ I-2.1.1), on illustrera leur usage par un exemple (§ I-2.1.2, page 152).

### I-2.1.1 Les principes de fonctionnement des logiciels de simulation de processus

Dans la simulation, un **système à événements discrets** est un système dont on considère que l'état change seulement au moment où se produit un événement, qui peut être d'occurrence aléatoire<sup>1</sup>. L'événement peut être endogène (comme le début ou la fin d'une opération, l'occurrence d'une panne...) ou exogène (comme l'arrivée d'un client ou d'un objet dans le système, l'arrivée d'une date...). Dans cette approche, ce qui se passe entre deux événements consécutifs (par exemple entre le début et la fin d'une opération) n'est pas pris en considération<sup>2</sup>. La simulation de tels systèmes s'appuie donc sur une incrémentation variable du temps qui s'étend de la date d'un événement à celle de l'événement suivant. L'occurrence d'un événement déclenche une action<sup>3</sup> (début d'une opération, mobilisation d'une ressource, envoi d'un article dans un stock...).

De nos jours, les simulateurs utilisent une interface graphique sophistiquée permettant facilement de décrire les ressources d'un système productif, les produits faisant l'objet d'opérations de production et leurs gammes. L'interface graphique élimine la nécessité d'un apprentissage préalable d'un langage de

1. Cette approche est l'une des quatre possibles adoptées en simulation (Banks (1998, [35]), mais c'est la plus répandue en simulation de processus productif. L'approche décrite au § III-1.2.2, page 424 du chapitre V relève de la méthode dite des «trois phases».

2. L'approche alternative est celle de la simulation en continu (qui peut conduire à la possibilité de situations hybrides). Dans cette approche, des équations permettent de décrire à chaque instant l'état de chaque composant du système étudié. Cette approche, surtout utilisée dans les sciences de l'ingénieur, présente l'inconvénient en gestion de n'être adaptée qu'à une représentation le plus souvent trop macroscopique de la réalité pour pouvoir apporter un éclairage à la plupart des problèmes décisionnels. Elle a connu dans les années soixante un certain développement avec les travaux de Forrester (1961, [154]) et a connu quelques prolongements en gestion (voir, en particulier Thiel, 1998, [417]). Une rapide présentation de ces approches alternatives peut être trouvée dans l'ouvrage de Banks (1998, [35]).

3. Voir également, le chapitre XIV, page 959, sur cette approche de programmation événementielle.

programmation qui n'est nécessaire<sup>1</sup> que dans la description d'actions sophistiquées liées à certains événements. La simulation demandée provoque la «projection d'un film» décrivant le fonctionnement dynamique du système (flux de production, circulation de ressources mobiles) ce qui lui confère un fort pouvoir descriptif du comportement d'un système productif piloté par certaines règles et soumis à une certaine demande. Examinons les concepts mobilisés par les principaux simulateurs commerciaux.

Dans un modèle de simulation, l'**article** (ou l'entité, la transaction ou l'objet, selon la terminologie utilisée) correspond à ce qui est traité dans un processus. Il s'agit :

- soit d'un objet physique (pièce, dossier...) ou immatériel (document électronique, communication téléphonique...) et dans ce cas il y a transformation progressive de certaines caractéristiques de l'objet au cours du processus (caractéristiques morphologiques ou de localisation pour l'objet physique, valeurs d'attributs pour l'objet immatériel);
- soit d'une personne consommatrice d'une prestation de service effectuée dans un centre de production de service (restaurant, comptoir bancaire, service hospitalier...); dans certains cas, le consommateur de la prestation de service peut être l'une des ressources mobilisées dans la fourniture de la prestation (distributeur de marchandise, Guichet Automatique Bancaire...); lorsque la prestation de service se caractérise par la fourniture d'une information (horaire, position de compte, achat de billet électronique d'avion...) ou d'un bien à livraison différée (VPC Internet), la localisation du consommateur importe peu dans un environnement de *web office* qui permet à un client distant d'accéder aux prestations désirées via Internet.

Table des matières

Index thématique

L'article est caractérisé par des attributs qui peuvent être intangibles (désignation, quantité à fabriquer, gamme utilisable, etc.) ou modifiables au cours de la simulation (statut de l'article après un contrôle, par exemple). Les arrivées des articles rentrant dans le système, et certaines de leurs caractéristiques, sont habituellement régies par des lois statistiques (stables ou non au cours du temps) choisies pour une simulation. Il est possible de contrôler cette génération aléatoire<sup>2</sup> pour que le même jeu de données soit soumis à un système productif dans lequel on fait varier le niveau de certaines ressources ou les règles de pilotage.

Dans un modèle de simulation, l'article est inévitablement soit dans un processeur (voir ci-après), soit dans un *stock*, l'article étant nécessairement prélevé dans un stock pour aller dans un processeur pour y subir une opération.

1. Il peut s'agir d'un langage de programmation structurée propre au logiciel et/ou de langages de programmation évolués comme VB ou C++ ou encore, la possibilité de mobiliser à tout moment d'une simulation, les ressources offertes par Excel et VBA. Dans cette dernière solution, un modèle de simulation peut mobiliser un classeur Excel et l'ensemble de ses fonctionnalités (étendues par les possibilités de VBA), mais, réciproquement, un modèle décrit dans un classeur Excel peut mobiliser le modèle d'un simulateur de processus. Cette synergie récente ouvre des perspectives qui modifient de manière notable l'approche de nombreux problèmes de gestion, d'autant plus que l'arrivée d'algorithmes génétiques sous la forme d'add-in d'Excel permet une optimisation de problèmes non linéaires d'une certaine complexité.

2. En fait, les générateurs de nombres aléatoires sont des algorithmes qui génèrent un ensemble conséquent (plusieurs dizaines de milliers) de valeurs aléatoires. Le contrôle s'effectue alors par le choix du générateur et d'un paramètre d'initialisation.

- Si l'article est un objet, le stock sera un magasin de pièces détachées, un entrepôt, un conteneur, une cuve qui se situent à distance des processeurs ou à proximité pour un stock dédié d'articles devant être rapidement traités par le processeur.
- Dans le cas particulier de véhicules terrestres, aériens ou maritimes<sup>1</sup>, on retrouve aussi le stock soit sous la forme de parking lorsque le véhicule est en attente d'affectation, soit sous la forme de point d'embarquement (quai de transbordement...).
- Si l'article est une personne, le stock sera une *file d'attente* ou une salle d'attente, selon que la personne peut s'asseoir ou non.

Un stock est caractérisé par des attributs: désignation, capacité maximale, règle de gestion des entrées et des sorties des articles dans le stock (FIFO...), etc. Le stock est passif en ce sens qu'il ne provoque pas l'entrée ou la sortie d'un article en son sein: ce sont les processeurs qui tirent des articles d'un stock et poussent les articles qu'il traite vers d'autres stocks. On introduit des stocks fictifs à l'entrée du système étudié pour y accueillir les articles venant de l'extérieur pour être traités par le système productif. De même, on introduit des stocks fictifs à la sortie du système étudié pour y accueillir les articles traités par le système étudié et quittant celui-ci.

La simulation fait appel à des *processeurs* (ou des *serveurs* ou des *machines*, selon la terminologie utilisée) qui sont des centres de production ou des postes de travail, selon le niveau de détail retenu, dotés ou non d'équipements spécifiques. Lorsque l'article fait l'objet d'une transformation physique, le processeur comporte une ou plusieurs machines (éventuellement mises en lignes de production ou d'assemblage). Lorsque la prestation est une prestation de transport, le processeur est un engin de transport (véhicule terrestre, aérien ou maritime) ou de manutention<sup>2</sup> (chariots, convoyeurs...). Dans la production de biens, le poste de travail comportera des machines permettant de réaliser des opérations de transformation, de manutention ou de transport. Dans la production de prestations de services impliquant la présence du consommateur en un lieu précis, le processeur sera, par exemple, une table de restaurant, un cabinet de consultation médicale, une salle de cours..., qui pourront être dotés ou non d'équipements (automate bancaire, distributeur de marchandise, mobilier, micro-ordinateur, appareil médical...).

Le processeur peut ou non traiter simultanément plusieurs articles (four, table de restaurant...). À la sortie du processeur, l'article peut conserver le même nom ou en changer (un nouveau composant étant créé au cours de l'opération à partir d'un ou plusieurs autres composants). L'opération effectuée par le processeur peut ou non nécessiter la présence d'un *outillage* spécifique lequel dépend de l'opération à réaliser et peut-être partagé par plusieurs processeurs du même type, son indisponibilité empêchant l'exécution d'une opération. L'exécution de l'opération peut nécessiter la présence d'un *opérateur* ou de plusieurs opérateurs (ayant ou

1. Dans ce cas, le processeur réalise des opérations d'embarquement, de débarquement ou d'acheminement.

2. Certains simulateurs sont spécialisés dans la gestion de magasins de stockage automatique, de transports filoguidés et de convoyeurs; ils permettent d'optimiser la conception ou la transformation de tels systèmes (équipements, implantation, règles de fonctionnement).

non des qualifications identiques). Selon les simulateurs, le processeur peut effectuer des opérations plus ou moins complexes :

- prendre 1 article (ou un lot de  $n$  articles) pour sortir 1 article (ou un lot de  $n$  articles),
- prendre plusieurs articles pour les assembler en un article à la sortie,
- prendre un article pour produire  $n$  articles en sortie (désassemblage).

Le processeur utilise une *gamme* dont les caractéristiques (distribution de probabilité du temps de lancement et du temps opératoire unitaire, règle de lotissement) sont prédéterminées s'il est spécialisé dans le traitement d'un seul article. Dans le cas contraire, cette définition est liée aux attributs de l'article à traiter. La progression des articles dans le système productif est assurée par l'ensemble de règles de fonctionnement des processeurs. Lorsque celui-ci est libre, l'occurrence d'un événement – sa libération étant un événement – déclenche une tentative d'utilisation du processeur en cherchant un travail à effectuer par prélèvement d'un article (ou un lot d'articles) dans un stock appartenant à une liste de stocks en vérifiant qu'il dispose des ressources en opérateurs et outillage. De nombreuses règles de balayage sont disponibles et sont d'autant plus sophistiquées que le processeur est polyvalent et la production complexe (voir [chapitre V, section II, page 409](#)). Lorsqu'une opération s'achève, des actions peuvent être déclenchées, conduisant à la modification d'attributs d'articles, d'indicateur associés à des ressources ou de certains paramètres de pilotage de la simulation. Le produit est ensuite envoyé dans un stock qui peut être toujours le même ou être déterminé par un attribut de l'article ou tiré aléatoirement parmi quelques stocks possibles (par exemple, un dossier peut être traité définitivement avec une probabilité de 80 % ou conduire à une demande d'information complémentaire avec une probabilité de 20 %, ce qui conduit à deux stocks possibles en sortie).

Table des matières

Index thématique

La disponibilité des différentes ressources du système productif est décrite par des plannings d'ouverture. Des pannes aléatoires de processeurs peuvent être simulées, ainsi que les durées de réparation.

La simulation du fonctionnement d'un système productif est effectuée pour évaluer les conséquences d'une modification de certaines caractéristiques du système productif (ressources mobilisées, procédures, etc.) et / ou de son usage (demandes à satisfaire). Ces conséquences sont évaluées à travers un certain nombre d'indicateurs physiques dont on retrace l'évolution au cours de la simulation par des graphiques et qui ont principalement trait aux ressources (occupation...), stocks (longueur de files d'attente...) et articles (temps de séjour dans le système...). On tire de ces évolutions des distributions que l'on peut considérer, sous certaines conditions, comme de bonnes approximations de distributions de probabilité de ces indicateurs physiques et résumer par des indicateurs de tendance centrale (attente moyenne d'un article dans le système, par exemple) et de dispersion. Des paramètres de tendance centrale et de dispersion de ces indicateurs physiques peuvent être utilisés pour évaluer globalement le fonctionnement du système simulé sur une période donnée. Certains simulateurs permettent facilement de calculer des indicateurs synthétiques faisant intervenir de nombreuses informations (coûts de fonctionnement, valeur de production, marge réalisée..., calculés sur la durée de la simulation).

Trois remarques complémentaires doivent être faites :

- Le suivi en temps réel de certains de ces indicateurs physiques et leur accessibilité à tout moment dans la simulation permettent un pilotage sophistiqué du système productif en permettant, par le biais de méta-règles utilisant la valeur courante de ces indicateurs physiques, de modifier au cours du temps les règles de gestion utilisées globalement ou localement sur certains postes de travail.
- Depuis quelques années, arrivent sur le marché des logiciels de simulation qui offrent des possibilités d'optimisation<sup>1</sup>. Cette approche, bien que posant quelques problèmes méthodologiques<sup>2</sup>, repose sur le choix d'un indicateur synthétique et l'existence d'alternatives relatives à des paramètres sous contrôle (niveaux de ressources, procédures, etc.). Le logiciel cherche alors la combinaison des variables de contrôle qui optimise l'indicateur synthétique, toutes choses égales par ailleurs.
- Dès que le système productif comporte quelques dizaines de processeurs, la représentation cartographique devient difficilement lisible. Pour faciliter la compréhension des processus complexes, certains simulateurs permettent de réunir plusieurs processeurs en un macro-processeur qui les remplace dans la représentation graphique, un simple clic sur le macro-processeur ouvrant une fenêtre décrivant le processus élémentaire traité par le macro-processeur. Cette mise en œuvre de la vision hiérarchique des processus, prônée dans la plupart des approches de modélisation de processus, n'est pas encore généralisée, mais s'imposera nécessairement à terme.

### I-2.1.2 Exemple

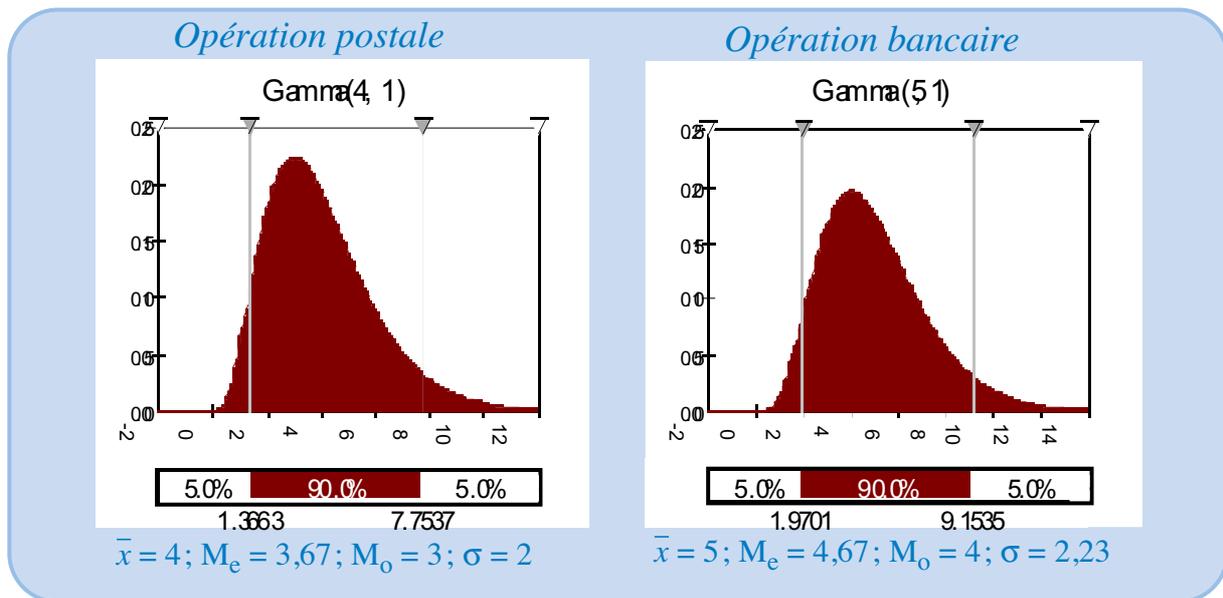
En cliquant sur les icônes mises en marge du texte, vous pouvez examiner (sur PC seulement) deux simulations très simples du fonctionnement de deux organisations d'un bureau de poste comportant cinq positions de travail et accueillant des clients venus faire soit des opérations postales, soit des opérations financières (les lois de l'intervalle de temps séparant deux arrivées successives étant des lois exponentielles<sup>3</sup> respectivement de moyennes 1,5 minute et 3 minutes). La distribution du temps de traitement requis par un client venu effectuer des opérations postales ou bancaires est décrite à la [figure 28 de la page 153](#), avec l'intervalle de confiance à 90 % de cette durée, ainsi que ses principaux paramètres de tendance centrale et de dispersion.

1. C'est le cas de gros simulateurs industriels comme Witness fonctionnant sur PC, mais aussi de simulateurs un peu moins ambitieux, mais beaucoup moins chers comme Simul8.

2. Voir sur ce point la contribution d'Andradottir dans Banks (1998, [35]).

3. Rappelons que la loi exponentielle de paramètre  $\beta$  est telle que la probabilité que la durée  $X$  soit supérieure à  $x$  est :  $P(X > x) = e^{-x/\beta}$  et que cette distribution est reliée à la loi de Poisson, puisqu'elle décrit la probabilité de l'intervalle de temps séparant deux événements successifs se produisant dans le cadre d'un processus de Poisson dans lequel la distribution de probabilité du nombre  $Y$  d'événements se produisant par unité de temps suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ , avec  $\lambda = 1 / \beta$ . Sachant que  $E(X) = \beta$  et  $E(Y) = \lambda$ , il s'ensuit que la durée moyenne séparant deux événements successifs est l'inverse du nombre moyen d'événements se produisant par unité de temps (laquelle est, bien entendu, la même que celle utilisée pour définir l'intervalle de temps séparant deux événements successifs). Bien évidemment, dans la réalité, les lois d'arrivée varient au cours du temps ; cette prise en compte dans la simulation est sans problème, mais n'a pas été retenue ici pour éviter de compliquer inutilement cet exemple introductif.

FIGURE 28  
Distributions de la durée d'une opération bancaire ou postale



Dans la première organisation, 3 guichets sont spécialisés dans les opérations postales et les 2 autres dans les opérations financières. Dans la cartographie du processus de la [figure 29 de la page 154](#), on peut voir deux arrivées de ces deux clients dans le système productif, visualisées par deux portes<sup>1</sup>. On fait l'hypothèse que le bureau comporte deux files d'attente spécialisées et que tout client qui entre dans le bureau de poste et trouve dans une file d'attente de 10 personnes, refuse de rentrer. Par ailleurs, on suppose que tout client qui passe plus de 10 minutes dans la file d'attente se lasse et s'en va sans être servi<sup>2</sup>.

La cartographie du processus de l'organisation du bureau de poste avec des guichets polyvalents est fournie dans la [figure 30 de la page 154](#); dans ce cas, la file d'attente est limitée à 20 (mais dans la simulation effectuée, le maximum observé est de 16 clients dans la file).

La simulation est réalisée en continu sur 40 heures représentant le fonctionnement du bureau de poste pendant 5 jours<sup>3</sup>, avec rigoureusement les mêmes arrivées et les mêmes temps de service dans les deux configurations testées. Les résultats comparés de ces deux simulations sont fournis dans le [tableau 8, page 155](#); la [figure 31 de la page 155](#) synthétise les distributions de probabilité des attentes des clients et la [figure 32 de la page 156](#) illustre l'évolution des files d'attente et de l'occupation des guichets. On peut vérifier sur cet exemple la supériorité de la polyvalence sur la spécialisation, en termes de niveau de service pour

1. Il était possible de fusionner ces deux arrivées, mais les animations disponibles sur le CD-Rom auraient été moins « parlantes ».

2. Il est facile de modéliser tout autre comportement dans la simulation, par exemple par le biais d'une distribution de probabilité du temps d'attente maximal. De telles sophistications n'auraient rien apporté à cet exemple introductif.

3. Cette simulation devrait être améliorée sur deux points: outre la variation dans la journée (et dans la semaine) des lois d'arrivée des clients, il faudrait tenir compte du fait qu'en fin de journée, le bureau ferme et vide les files d'attente (cela étant, on peut observer l'existence de files d'attente avant l'ouverture). Ces améliorations sont faciles à réaliser, mais n'amènent rien pour cet exemple introductif.



FIGURE 29

*Cartographie du processus du bureau de Poste dans la configuration de spécialisation des guichets*

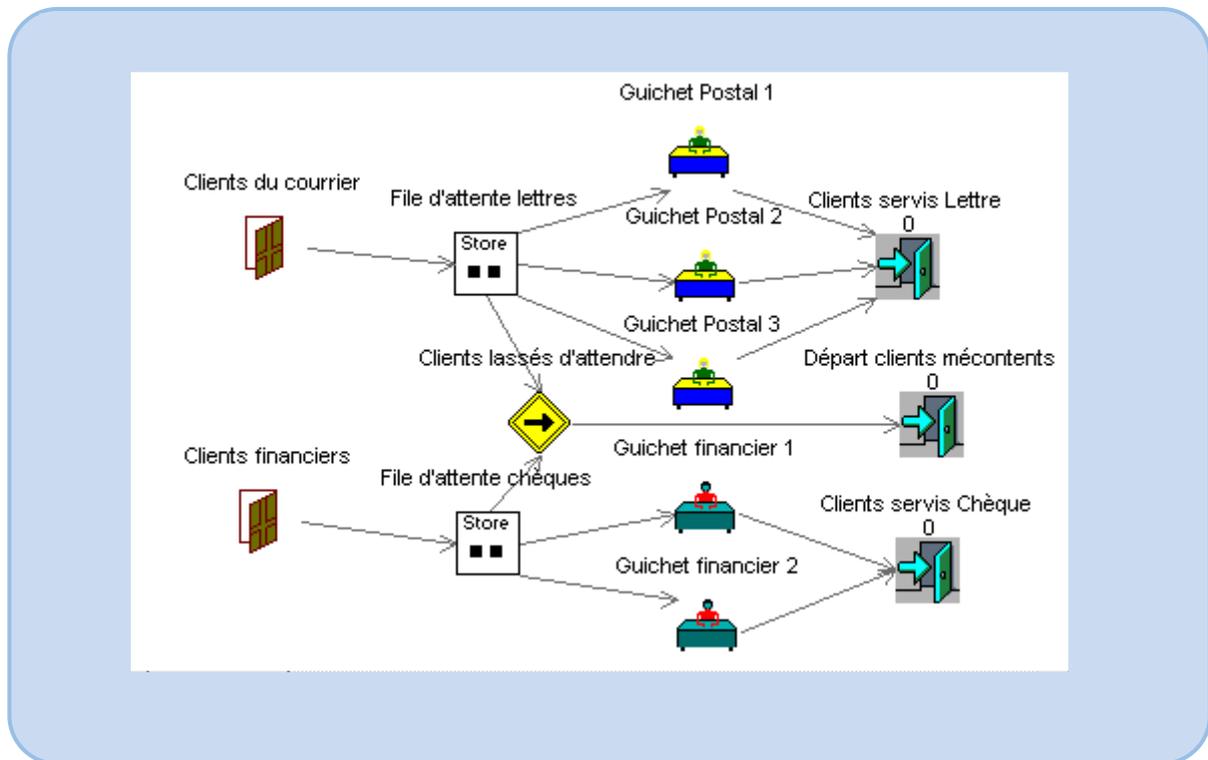


FIGURE 30

*Cartographie du processus du bureau de Poste dans la configuration de polyvalence des guichets*

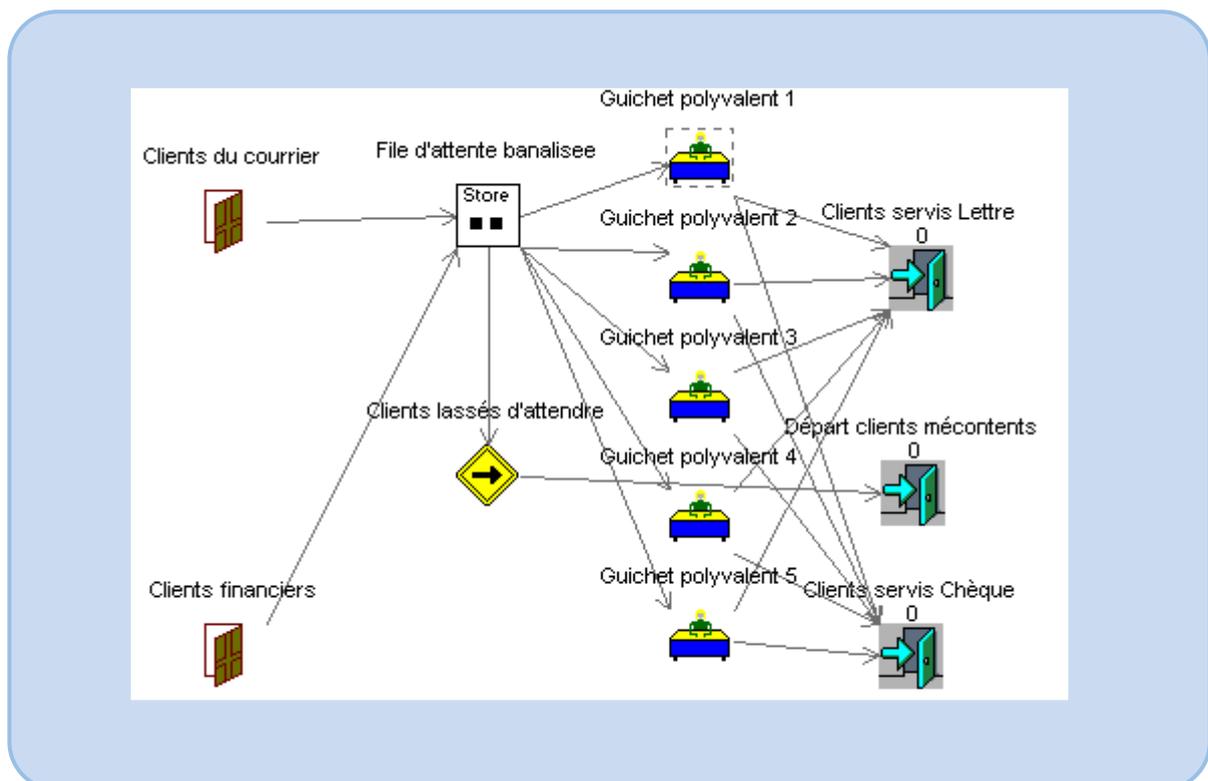


TABLEAU 8  
Analyse comparative des deux organisations

		Spécialisation	Banalisation
Clients postaux (lettres)	Clients non rentrés en raison de la longueur excessive <sup>1</sup> de la file d'attente (sur les 1637 clients s'étant présentés)	0,2%	0
	Temps moyen en file d'attente (limité à 10 minutes)	3,09	2,19
	% de clients ayant attendu dans la file d'attente	73,5%	881
	Temps moyen d'attente des clients ayant attendu	4,17	3,90
	% de clients partis (en raison d'attente trop longue <sup>2</sup> )	3,3%	1,5%
Clients financiers (chèque)	Clients non rentrés en raison de la longueur excessive <sup>†</sup> de la file d'attente (sur les 789 clients s'étant présentés)	0%	0
	Temps moyen en file d'attente (limité à 10 minutes)	3,08	2,49
	% de clients ayant attendu dans la file d'attente	66,9%	87,5%
	Temps moyen d'attente des clients ayant attendu	4,63	3,43
	% de clients partis (en raison d'attente trop longue <sup>‡</sup> )	2,0%	0,9%

1. File d'attente limitée à 10 personnes dans chacune des deux files d'attente de la configuration « spécialisée » (dans la simulation, les longueurs moyennes de queues ont été respectivement de 2,11 et 0,96 clients) et à 20 personnes dans le cas de la file d'attente unique de la configuration « banalisée » (en réalité, dans la simulation, le maximum observé est 16 et la longueur moyenne de la queue est, 2,28 clients).

2. Attente maximale de 10 minutes dans chaque configuration.

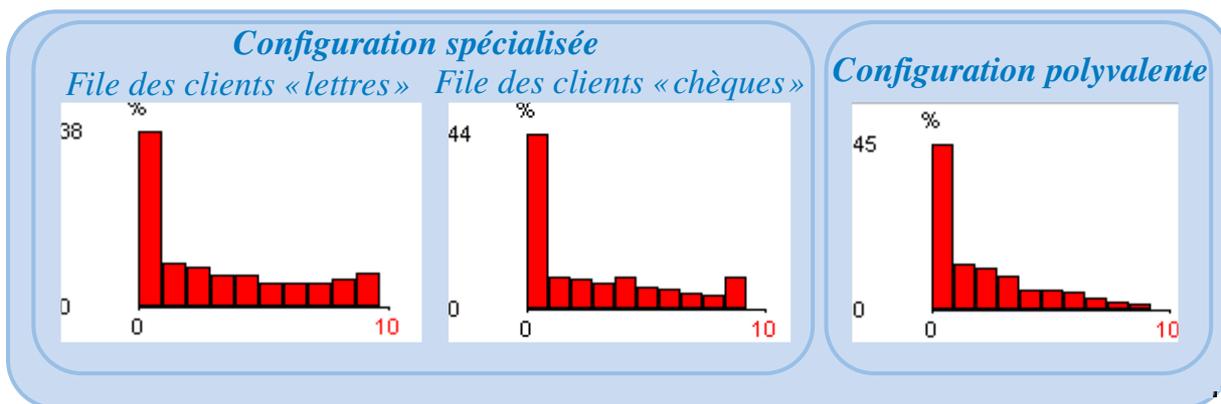
Table des matières

le client. Ce constat ne tient pas compte du fait que le poste polyvalent peut être plus onéreux que le poste spécialisé et que, dans ce cas, des structures hybrides combinant guichets spécialisés et polyvalents peuvent constituer un meilleur compromis.

Index thématique

FIGURE 31

Distribution du temps d'attente des clients dans les deux configurations



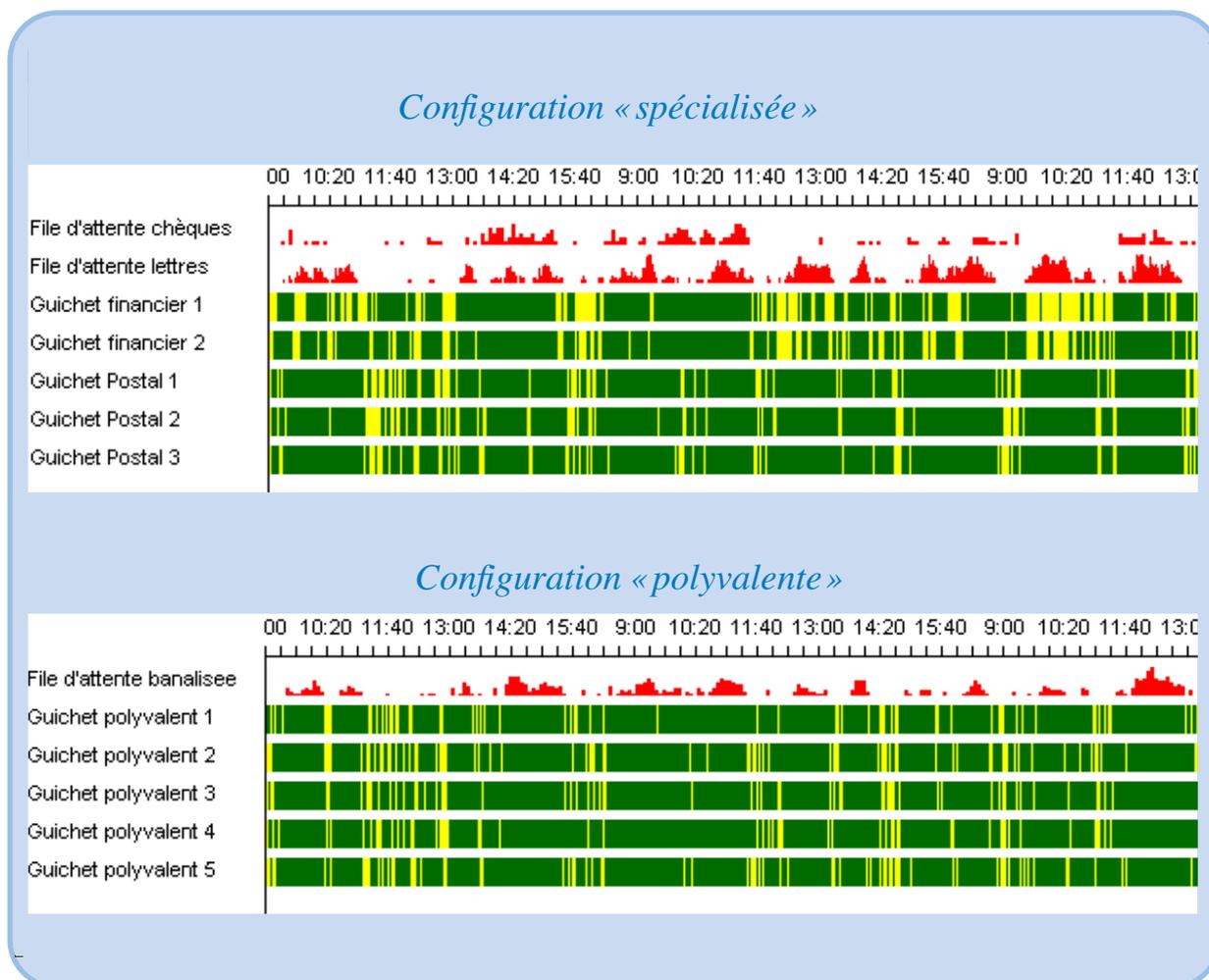
### I-2.2 Vision systémique du fonctionnement du système productif

Parue dans les années cinquante, l'approche cybernétique propose de distinguer dans un centre de production (qui réunit de manière durable un certain nombre de ressources productives complémentaires) :

- un système opérant qui réalise les opérations directement productives

FIGURE 32

Évolution des files d'attente et de l'utilisation des guichets dans la simulation

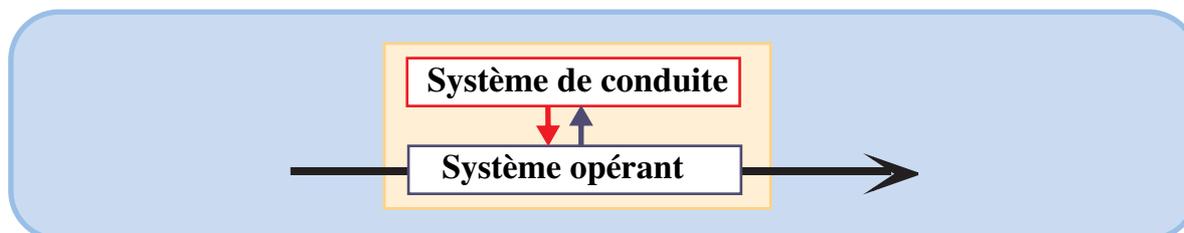
Table des  
matièresIndex  
thématique

- et un système de conduite qui intervient pour piloter les ressources productives et qui intègre à la fois le système d'information décrivant de manière plus ou moins fine l'état du système et l'ensemble des procédures de traitement de l'information et de prise de décision.

Cette conception est décrite par la [figure 33](#).

FIGURE 33

*Vision cybernétique du fonctionnement d'un centre de production*



L'approche simulateur des processus productifs (§ I-2.1, page 148) s'inscrit bien dans cette perspective, le système de conduite étant alors caractérisé par un ensemble de règles permettant le pilotage des flux. Cela étant, on se retrouve dans le cadre de décisions totalement structurées<sup>1</sup> – ce qui en permet la programmation

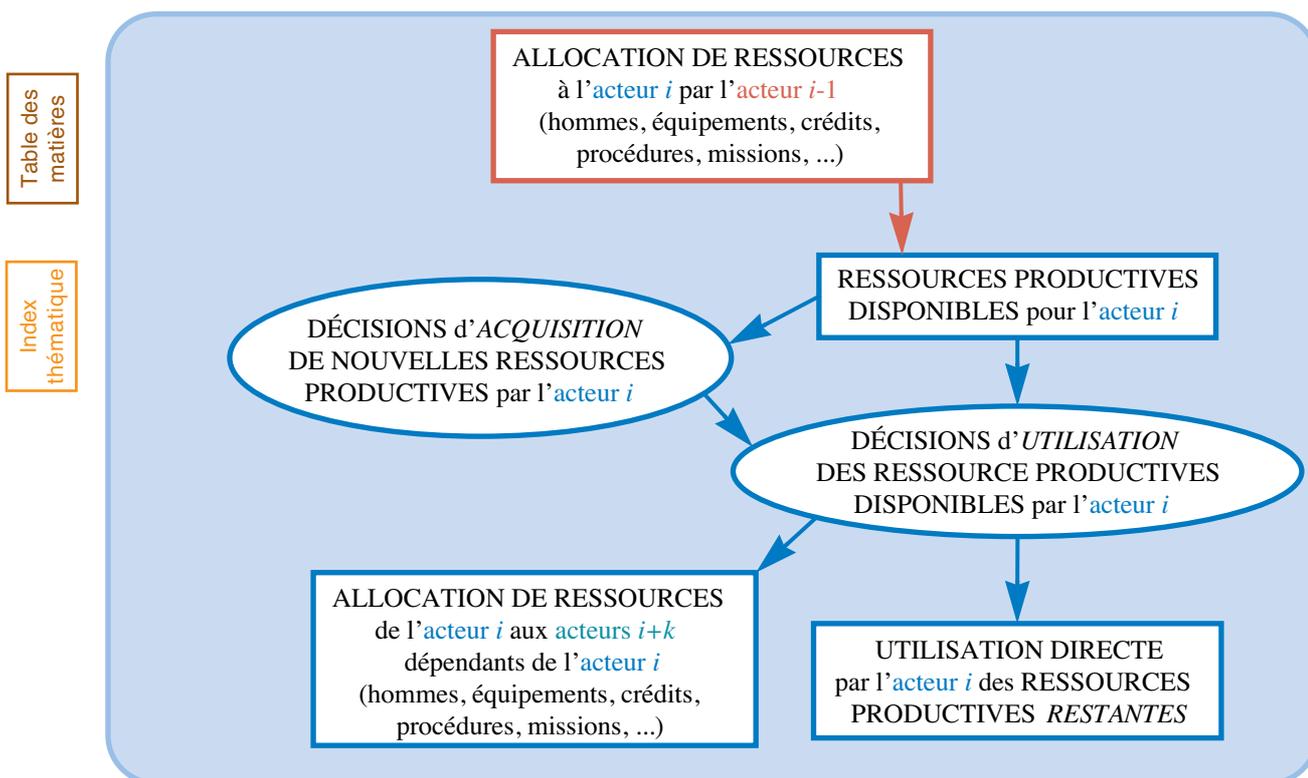
1. Voir [chapitre I](#), page 46.

– qui relèvent des décisions du niveau opérationnel. Cette vision cybernétique évacue la composante socio-organisationnelle du fonctionnement du système productif, nécessaire dans l'analyse des décisions tactiques et stratégiques, qui autorise une analyse en termes de négociation de ressources et d'objectifs.

Le point de vue socio-organisationnel débouche sur une vision d'une organisation en centres de décision que l'on peut représenter schématiquement par la [figure 34](#) qui n'implique aucune hypothèse implicite sur la configuration du système productif ou l'organisation retenue. Cette représentation est totalement inappropriée à la description de processus et ne se prête qu'à l'analyse de certaines décisions tactiques ou stratégiques. Elle reste cependant insuffisante pour éclairer ce type de décisions dans la mesure où elle néglige complètement l'utilisation des ressources dans le cadre du processus productif. Dans l'analyse de dossiers d'investissement qui comporte toujours une composante organisationnelle importante susceptible d'induire des biais importants dans l'analyse, on retiendra une synthèse de ces deux approches ([figure 35, page 158](#)) que l'on utilisera en particulier pour analyser la propagation des effets d'une décision d'investissement. Précisons les quelques concepts utilisés dans cette modélisation.

FIGURE 34

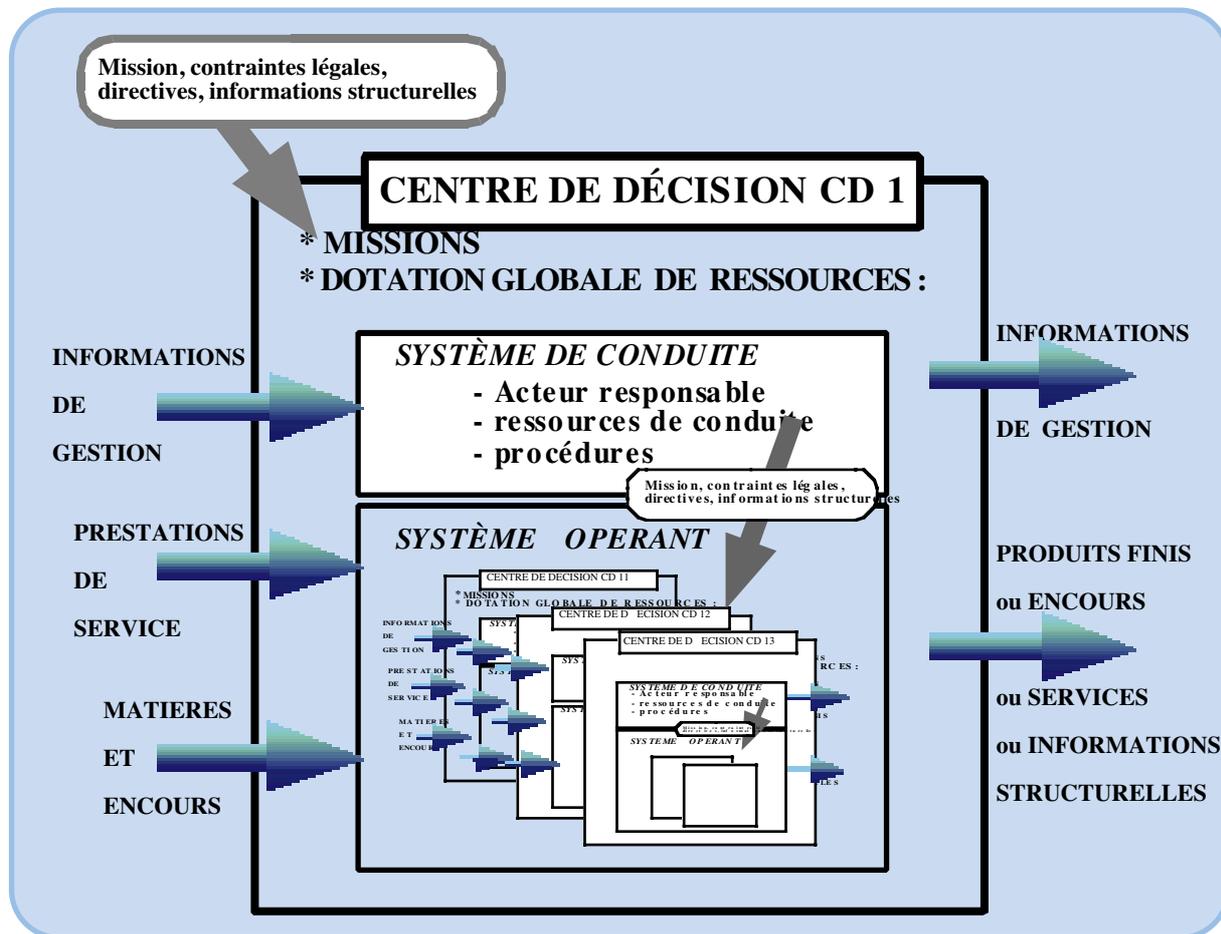
*Vision socio-organisationnelle du fonctionnement d'un centre de production*



Un **centre de décision** (CD) est un ensemble de ressources, possédant une structure de conduite avec, en particulier, un acteur responsable clairement identifié qui doit être mobilisé en vue de produire une certaine classe d'«objets» (produits physiques, prestations de service, informations structurelles, tous définis ci-après), en respectant au mieux une mission impartie. Un centre de décision comporte donc un système de conduite et des ressources productives qui peuvent elles-mêmes être regroupées et constituer différents centres de décision à l'intérieur du premier si leur conduite nécessite et relève d'une structure décisionnelle

FIGURE 35

Synthèse des visions cybernétique et socio-organisationnelle du fonctionnement d'un centre de production



particulière. Ce modèle simple présente l'intérêt qu'il sépare le système de conduite du système productif et de forcer ainsi l'attention sur des procédures de conduite en général plus ou moins bien formalisées.

En fonction de leur « production », on peut distinguer trois types principaux de centres de décision :

- Les *centres de décision producteurs de produits physiques* correspondent aux sous-systèmes dont la mission principale consiste à transformer physiquement un produit, à en contrôler les caractéristiques ou à le déplacer ; par extension, on classera dans cette catégorie les sous-systèmes des entreprises de services qui contribuent directement à la réalisation de prestations de service correspondant à la satisfaction d'une demande finale.
- Les *centres de décision producteurs d'informations structurelles* correspondent aux services fonctionnels de l'entreprise (bureau d'études, service des méthodes...) qui fournissent aux centres de production et aux centres prestataires de service des informations qui spécifient leur « mission ». Plus précisément, on appelle informations structurelles des informations qui revêtent un caractère obligatoire quant à leur application et contraignent le fonctionnement du centre destinataire à certaines règles ou performances. Ce sont,

par exemple, les gammes de fabrication, les nomenclatures et les dessins des produits...

- Les *centres prestataires de services* sont les centres dont la mission consiste à fournir, maintenir et rénover les ressources humaines, physiques et informationnelles (hors les informations structurelles) des autres unités, ce qui comporte, entre autres, les services «entretien - maintenance», «fluides», «formation» et «approvisionnement». Généralement, ces unités facturent leurs prestations à des taux standards, aux unités «clientes». Elles travaillent à capacité fixe, c'est-à-dire qu'une décision modifiant le niveau de «consommation de prestations» d'un centre (durée et fréquence des interventions, ainsi que le degré de technicité requis) ne permet pas, la plupart du temps, de redéfinir immédiatement le potentiel alloué à ces services prestataires.

Le modèle de représentation retenu classe en six types différents les flux qui entrent ou sortent d'un centre de décision :

- La *mission* correspond à l'ensemble des contraintes légales, directives et informations structurelles reçu par un centre de décision. Ces informations qui caractérisent la «mission» proviennent donc soit d'un centre de décision hiérarchiquement supérieur, soit de centres fonctionnels producteurs d'informations structurelles.
- Le *flux de production entrant* n'existe que pour les centres producteurs de produits physiques ; il correspond à des matières, articles, composants, sous-ensembles et produits qui entrent dans l'unité de production en provenance de centres fournisseurs (internes ou externes à l'entreprise) et que l'on retrouve, après transformation, dans les produits finis ou semi-ouvrés en sortie du centre de production.
- Suivant la nature du centre de décision, le *flux de production sortant* correspond à une production soit de produits physiques, soit des informations structurelles, soit de prestations de services.
- Le *flux de prestations de services entrant* correspond à l'ensemble des prestations de services dont bénéficie l'unité et qui sont nécessaires à la réalisation de sa mission et de son activité. Dans le cas de centres prestataires de services ou producteurs d'informations structurelles, ce flux entrant peut intégrer certaines matières nécessaires à son activité (pièces de rechange, fluides, supports physiques d'informations...).
- Les *flux d'informations de gestion entrant et sortant* sont constitués des informations éphémères (à opposer aux informations structurelles) que s'échangent, de manière plus ou moins formelle, les différents centres sur leur état, à un instant donné (position des stocks, niveau d'activité, disponibilité des ressources, personnels présents...) et qui permettent, en temps réel, la réactivité du système productif aux aléas et dysfonctionnements. Il faut noter que, suivant le processus de production adopté, ces informations revêtent une importance inégale ; ainsi, dans le cadre d'une unité produisant en juste-à-temps, le volume, la date et la précision de ces informations conditionnent fortement l'efficacité du système.

Tout flux (entrant ou sortant) est défini par des paramètres tels que le volume, la qualité, la régularité, la périodicité, ainsi que par des règles fixant les conditions

d'émission et d'utilisation de ces flux. Il existe souvent un certain nombre de contraintes techniques<sup>1</sup> qui lient les flux et les ressources qui les produisent et qui les utilisent. Il en résulte que, dans certains cas, une modification de certaines caractéristiques de ressources d'un centre productif (respectivement, de flux) implique une modification de flux entrants ou sortants (respectivement, de ressources du centre émetteur du flux ou du centre utilisateur). La mauvaise perception de ces contraintes est l'une des causes de la vision « locale » de certains dossiers.

### I-2.3 Les outils de cartographie de processus

Certaines approches, comme celle du modèle SCOR utilisé pour décrire le fonctionnement de la chaîne logistique (voir [page 895](#)) décrivent les processus comme un réseau de « modules » assurant un certain nombre de fonctions.

Depuis le milieu des années soixante-dix, de nombreuses approches de modélisation ont été développées. Ces approches s'appuient sur des bases méthodologiques communes, mais comme chacune d'entre elles privilégie un point de vue et niveau d'analyse particuliers, elles ne sont pas interchangeables. Les grilles de lectures utilisées (en combinaison partielle) sont :

- l'*enclenchement* des tâches identifiées, avec ou sans prise en compte du *temps*; ces enclenchements peuvent ou non faire apparaître explicitement des informations de gamme en explicitant les *alternatives* rencontrées pour détailler tous les traitements que réalise un processus;
- les *ressources* mobilisées: équipements, informations, personnes (ou agents); en ce qui concerne cette dernière ressource, différentes conceptions sont possibles et détaillées dans l'alinéa suivant;
- les *rôles* joués dans un processus; les rôles sont alors déconnectés des structures organisationnelles et peuvent être joués par des personnes n'appartenant pas à un service prédéterminé, cette distinction est importante dans une perspective de révision d'un processus; certaines approches privilégient la notion de service fonctionnel, auquel cas, la liste des rôles joués par les personnes d'un service est considérée comme stable (vision acceptable dans une analyse de l'existant);
- certaines représentations impliquent une approche hiérarchique des processus en visant à travailler simultanément sur un nombre limité d'activités; dans ce cas, des conventions sont utilisées pour faciliter le zoom permettant d'aller au niveau de détail désiré.

Une dernière caractéristique doit être introduite pour pouvoir classer les différentes approches existantes. Certaines d'entre elles sont statiques au sens où elles ne visent qu'à décrire un processus, tandis que d'autres, moins nombreuses, sont dynamiques<sup>2</sup>, au sens où elles visent à simuler le processus en spécifiant les lois des arrivées du processus, celles des temps opératoires ainsi que la distribution de probabilité associée aux alternatives à la sortie d'un aiguillage. Cette dernière approche n'est envisageable que pour des processus opérationnels bien structurés, pour lesquels on dispose d'informations fiables. Cette approche simulatoire doit être distinguée de celle utilisée par les simulateurs de processus présentés au § I-

1. Note de la page précédente. Voir Giard, Triomphe et Vergnenègre (1990, [202]).

2.1, page 148, par le fait qu'elles explicitent les gammes opératoires qui sont «masquées» dans les simulateurs de processus (il faut ouvrir des fenêtres ou lire le code informatique pour prendre connaissance des gammes utilisées). Ces deux approches sont complémentaires : le simulateur de processus fournit des informations sur l'efficacité du processus en fournissant des indications sur le taux d'utilisation des ressources, tandis que les outils dynamiques de cartographie des processus permettent de réfléchir sur les gammes utilisées, en particulier pour les processus administratifs (les gammes de production de produits soulevant moins d'interrogations).

Les premières approches de modélisation de processus<sup>1</sup> ayant connu une réelle diffusion remontent à la fin des années soixante-dix avec **SADT** (*Structured Analysis and Design Technique*), avec son prolongement **IDF0** (*Integrated computer aided manufacturing DeFinition*) développé au cours de la décennie suivante sous l'impulsion du département de la défense aux États-Unis. La modélisation du processus repose sur l'**activité** qui consomme des **inputs** et produit des **outputs**, les inputs et les outputs pouvant être des informations ou des produits, et à laquelle on associe des **mécanismes** qui représentent les ressources humaines, matérielles et logicielles mobilisées par l'activité (une activité pouvant donc faire appel à d'autres mécanismes lorsqu'on révisé un processus, ce qui revient, dans l'analyse, à bien séparer le «quoi?» du «comment?») et des **contrôles** lesquels correspondent à des informations qui contraignent l'exécution de l'activité sans être modifiées par elle. La «brique de base» de cette modélisation est représentée à la **figure 36**. Le positionnement relatif de ces éléments est standardisé ; l'output d'une activité peut être l'input d'un autre, ce qu'illustre la **figure 37 de la page 162**. Un certain nombre de conventions graphiques complémentaires sont utilisées, en particulier pour indiquer si les inputs (ou les outputs) d'une activité sont à relier par des relations «et», «ou inclusif» ou «ou exclusif».

Il est recommandé de limiter à six le nombre d'activités, ce qui oblige à adopter une vision hiérarchique du processus (on parle de **décomposition fonctionnelle**), facilitée par une numérotation décimale des activités. Cela étant, la navigation entre plusieurs niveaux de détail de la modélisation rend difficile la vision d'ensemble ; d'un autre côté, on sait bien qu'un excès d'informations ne favorise pas non plus cette vision d'ensemble. Ajoutons enfin qu'une présentation classique de cette approche consiste à désigner une activité par un verbe d'action et les inputs et outputs par des noms, la représentation de la **figure 36 de la page 162** est alors appelée **actigramme**. On peut en tirer un graphe dual dans lequel les noms sont dans les nœuds du graphe et les verbes correspondent aux arcs ; on parle alors de **datagramme**.

2. *Note de la page précédente.* On n'évoquera pas ici l'approche des réseaux de Petri, en définitive peu utilisée dans la description de processus (pour une présentation synthétique et accessible, voir, par exemple, Proth, 1992, [351], chap VII). Dans cette approche, la description de la circulation de jetons (= objets) à travers le système productif relève en partie seulement d'une approche dynamique dans la mesure où il s'agit surtout de vérifier la cohérence des règles de fonctionnement du système étudié : d'une certaine façon le temps intervient surtout sous la forme des enclenchements. La méthode GRAFCET (voir, par exemple, David, [123], 1992) s'appuie sur cette approche et est utilisée pour décrire des processus de systèmes automatisés de production ; ce niveau de détail est trop fin pour le type de description de processus envisagé par les gestionnaires.

1. Une analyse synthétique de travaux de modélisation de processus peut être trouvée dans Vernadat (1999, [431]) et une analyse détaillée dans Vernadat (1996, [430]).

FIGURE 36  
L'activité SADT / IDF0

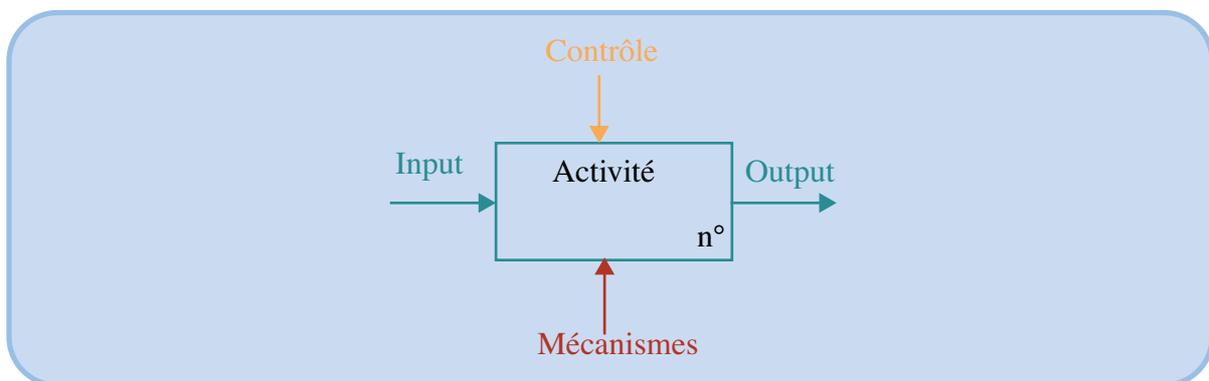
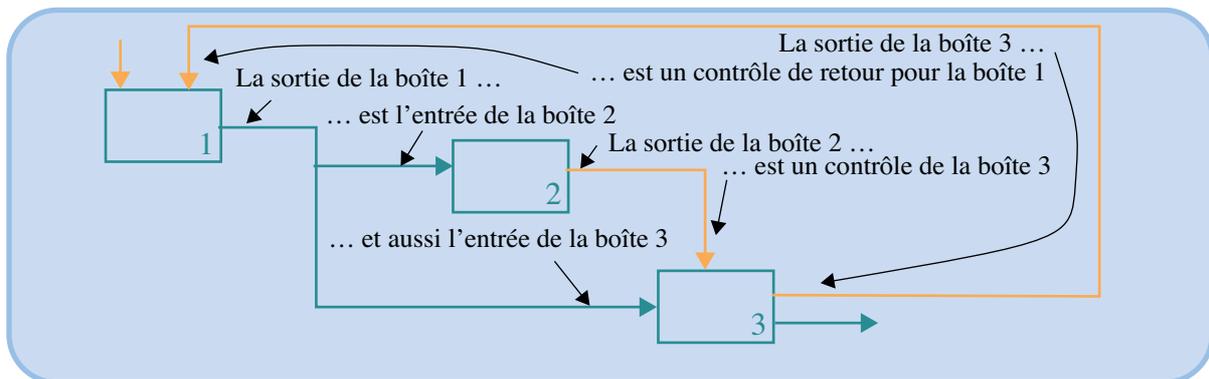


FIGURE 37  
Principe d'interconnectivité des activités (d'après Vernadat [431])



Les lacunes de IDF0 en matière de modélisation du comportement de l'entreprise (contrôles d'une activité) ont conduit à IDF3. À la notion d'activité succède celle d'**unité de comportement** (UDC) qui élargit la notion d'activité (qui, déjà, permettait d'aller du processus à l'opération élémentaire selon le zoom retenu) en y rattachant le concept d'événement et la possibilité de pointage sur une autre UDC ou un autre processus avec une mention de type «*go to*». Ces UDC sont reliées par des **liens** et des **boîtes de jonction** qui permettent une modélisation plus fine de la circulation des flux puisque les conventions utilisées permettent d'indiquer le caractère synchrone (simultanéité des inputs ou des outputs, selon le cas) ou asynchrone des flux entrants ou sortants. Les liens peuvent correspondre non seulement à des antériorités (flèche en trait plein) comme dans IDF0, mais aussi à des flux d'objets (flèche à double tête) et à de simples échanges d'informations entre UDC (flèche en pointillés). Par rapport à IDF0, on constate que les mécanismes (ressources mobilisées) sont absents et que les contrôles sont intégrés dans la représentation.

**CIMOSA**<sup>1</sup> (*Computer-Integrated Manufacturing Open System Architecture*) est une architecture issue d'un vaste programme européen amorcé au milieu

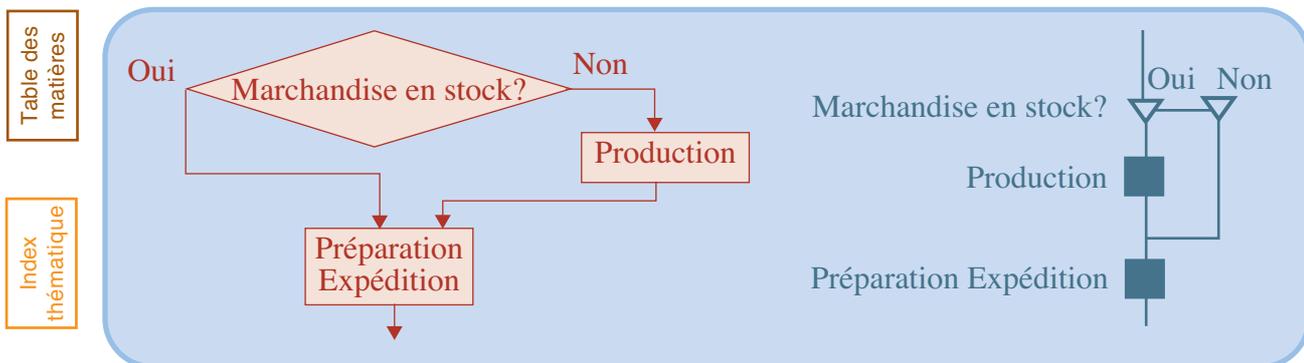
1. Une présentation détaillée (avec une bibliographie très détaillée) de CIMOSA et de ses prolongements peut être trouvée dans Vernadat (1996, [430]).

années quatre-vingt qui a été créé pour construire des systèmes intégrés de production et qui se trouve actuellement au cœur de nombreux travaux. CIMOSA comporte un langage de description des activités et des processus qui, comme les ERP<sup>1</sup>, présente un aspect assez normatif. La rigueur de la démarche a pour contrepartie d'en réserver l'usage à des spécialistes et de permettre difficilement une vision d'ensemble d'un processus d'une certaine complexité (lacune que tente de combler des travaux postérieurs). Dans les années quatre-vingt-dix, d'autres approches de modélisation de processus, plus «pragmatiques» ont vu le jour<sup>2</sup>, principalement aux États-Unis. Elles se placent dans la mouvance du *reengineering* et certaines d'entre elles appuient sur des logiciels, ce qui force à une certaine cohérence. En fait, il y a peu de nouveautés sur le plan conceptuel et les différences sont surtout des différences de présentation et, parfois, une incitation à l'utilisation de plusieurs grilles de lecture d'un processus.

La figure 38 illustre deux exemples de conventions utilisées pour décrire des tâches et des gammes. La convention de la partie droite de cette figure (modèle STRIM proposée par Ould, 1995, [323]), présente l'avantage de permettre la visualisation supplémentaire des interactions entre plusieurs rôles joués par des acteurs<sup>3</sup> généralement liés à des échanges d'information, et d'indiquer le rôle prépondérant dans l'interaction.

FIGURE 38

*Exemple de présentations alternatives de tâches et gammes dans un processus*



Illustrons quelques représentations de visualisation de processus en en délimitant, étant entendu que le niveau de détail (zoom) peut toujours être poussé sans problème.

- L'exemple 1 de représentation de processus (figure 39, page 164) s'attache à l'enclenchement des tâches, certains éléments de gammes sont explicites, les

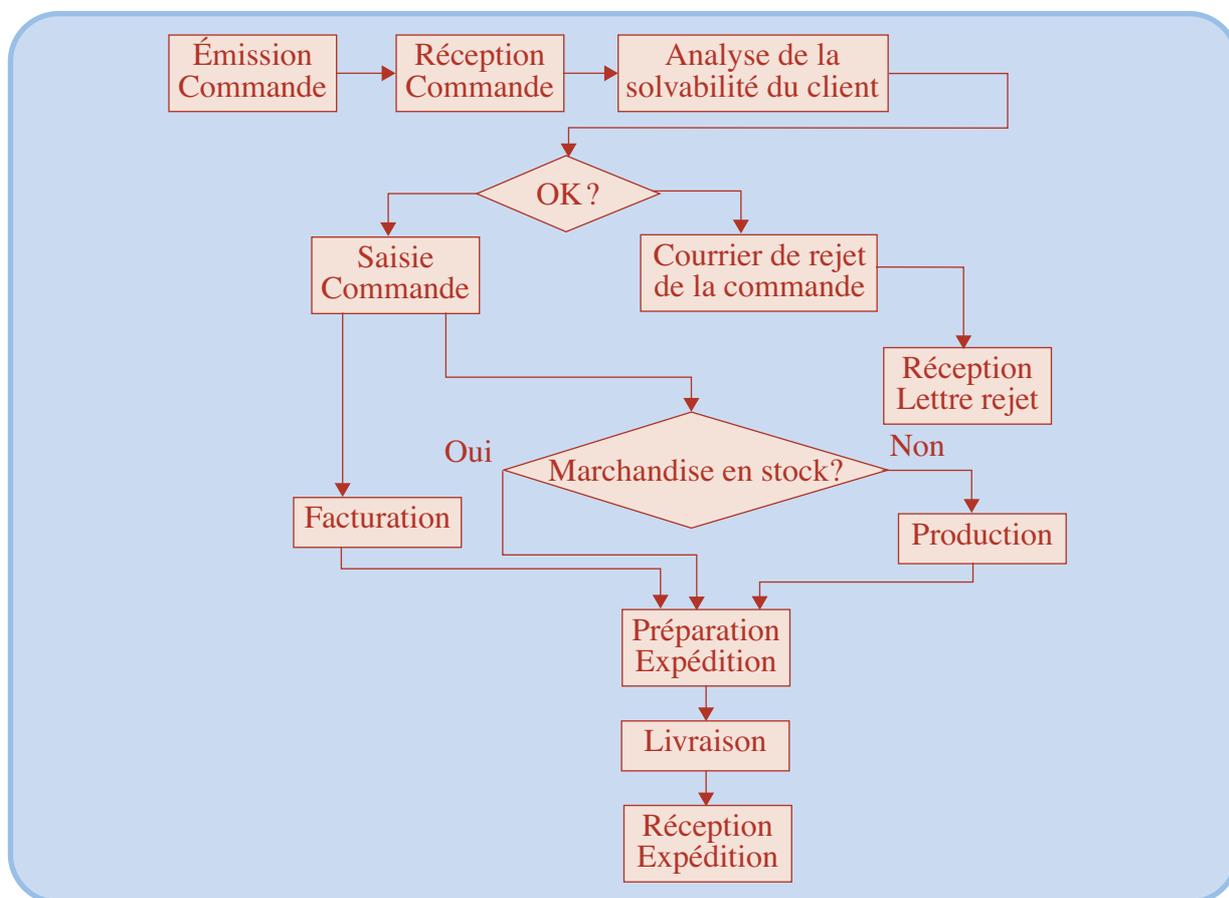
1. Voir le chapitre XIV, § III-2.1, page 968.

2. Voir, par exemple, Tenner & De Toro (1997, [413]) et Ould (1995, [323]). Quelques logiciels sont disponibles, une liste, un peu ancienne, peut être trouvée dans Hunt (1996, [235]); Optima est un logiciel de modélisation de processus représentatif de l'approche dynamique.

3. Ces rôles ne figurent pas ici, mais seront introduits, pour la convention de la partie gauche, sous forme de bandes rassemblant les tâches confiées à un même rôle dans la figure 40, page 165; dans cette représentation, les interactions entre rôles ne sont pas représentées. Aucune illustration des rôles ne sera fournie ici pour le modèle STRIM, mais le principe retenu est très simple à comprendre: l'ensemble des tâches confiées à un même rôle est positionné dans un rectangle à bords arrondis, ce qui permet une visualisation spatiale des différents rôles qui interviennent dans l'exécution d'un processus; les interactions entre deux tâches confiées à deux rôles différents sont tout simplement visualisées par trait reliant ces deux tâches et la tâche accessoire (avis, accord...) est visualisée en gris.

ressources mobilisées sont absentes, les flux de matières et d'informations sont implicites.

FIGURE 39  
Exemple 1 de représentation de processus



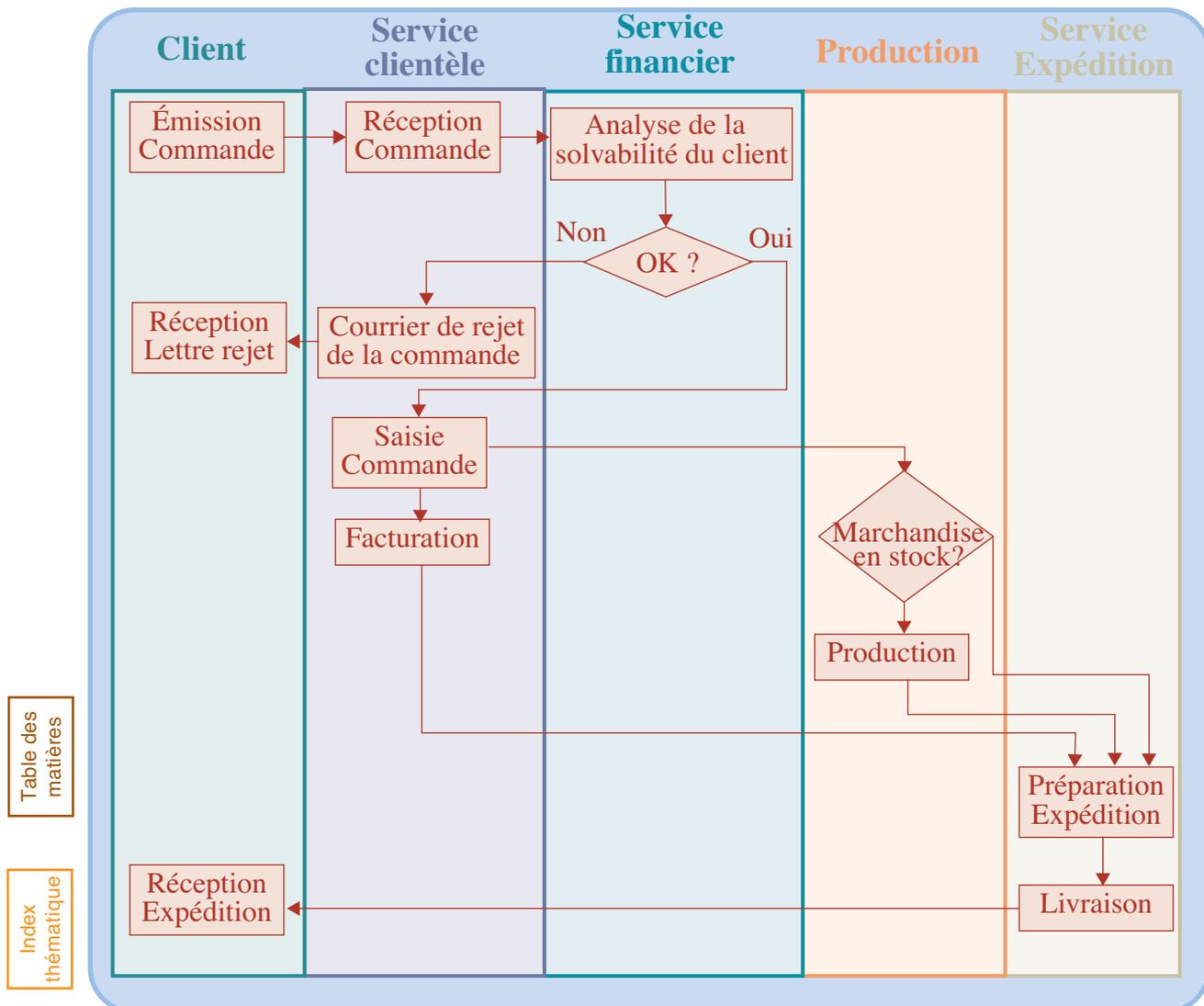
- L'exemple 2 (figure 40) enrichit la présentation en visualisant les services responsables. Les bandes horizontales peuvent être remplacées par des bandes horizontales, mais on visualise également ce qui relève d'un service par un simple rectangle à bords arrondis (les flèches allant aux tâches permettant de repérer «qui fait quoi»), ce qui permet une meilleure utilisation de l'espace, mais peut rendre la lecture du graphique plus compliquée si les flèches vont dans tous les sens. Le service peut être remplacé par celui de rôle ou d'acteur, en particulier à un niveau de détail supérieur à celui utilisé ici.
- L'exemple 3 (figure 41, page 166) représente les tâches du processus selon leur placement dans le temps<sup>1</sup>. Il est alors difficile de concilier de manière exacte l'information de date de début d'une tâche et sa durée, ce qui conduirait à une sorte de graphique de Gantt<sup>2</sup> «enrichi». En outre, la représentation simultanée d'alternatives d'un processus n'est envisageable qu'avec un repérage temporel grossier (ce que l'on va faire ici). On peut ajouter qu'une représentation de type Gantt - ressources<sup>3</sup> fléché (pour visualiser les relations

1. Cette présentation et la suivante sont proposées notamment par Tenner et De Toro (1996, [413]), mais elles sont transposables sans difficulté dans d'autres approches, comme celle du modèle STRIM d'Ould.

2. Pour cette représentation, voir le chapitre V, § I-1.1.1.2, page 365 et le chapitre IV, § III-1.1.6, page 306.

3. Voir figure 84, page 307.

FIGURE 40  
Exemple 2 de représentation de processus



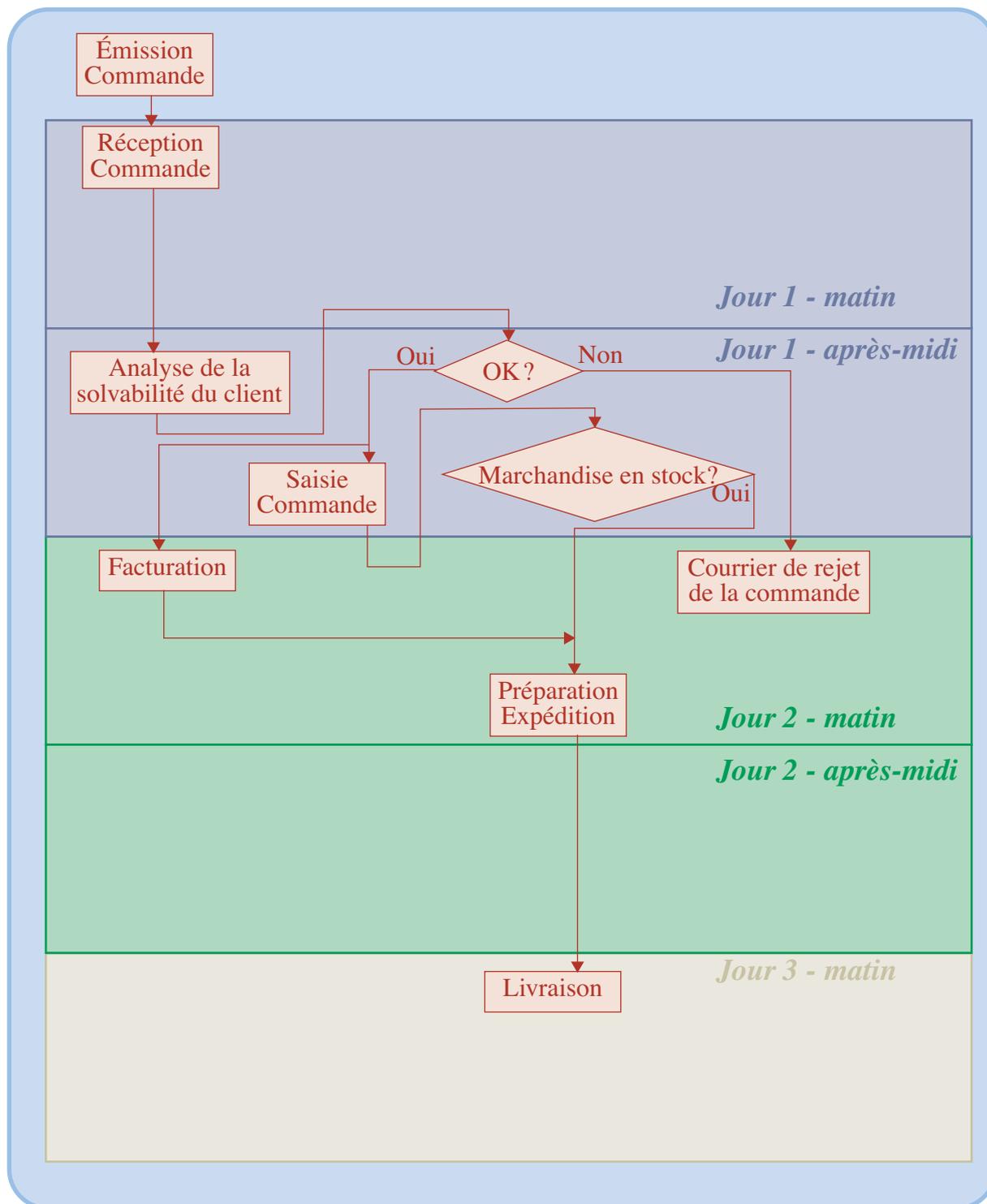
d'antériorité) est utilisable où les services (ou rôles) correspondent aux ressources, à condition d'éliminer les alternatives (difficilement conciliables avec ce type de représentation). Cette représentation conditionne la recherche d'améliorations axées sur la chrono-compétition<sup>1</sup>.

- Des conventions additionnelles sont utilisables lorsque la description est fine. Par exemple, des conventions de couleurs peuvent être utilisées pour dissocier les tâches ayant une valeur ajoutée pour le client, de celles qui n'en n'ont pas, mais bien d'autres typologies sont utilisables («préparer - décider - exécuter», par exemple). Ces représentations sont intéressantes pour stimuler la réflexion visant à améliorer des processus existants (cf. § I-2.4, page 167).

Ajoutons enfin qu'en Europe, à la fin des années quatre-vingt, une méthodologie d'analyse de processus orientée vers la production de prestations de services a été développée pour permettre une meilleure prise en compte de l'impact des nouvelles technologies sur l'organisation du travail. Connue sous le nom d'OSSAD (*Office Support System Analysis and Design*, Dumas & Char-

1. Voir chapitre I, page 67.

FIGURE 41  
Exemple 3 de représentation de processus



bonnel, [133], 1990), cette méthode s'inspire de démarches utilisées en système d'information en distinguant trois niveaux d'analyse allant du conceptuel à l'implémentation: le modèle abstrait (ce qui doit être fait et pourquoi), le modèle descriptif (modèle contingent à un environnement daté) et le modèle prescriptif (orienté implémentation). À chaque niveau d'analyse correspondent des concepts qui sont en relation avec ceux qui sont utilisés à d'autres niveaux. Par exemple, le modèle abstrait utilise le concept de fonction et d'activité (plus détaillé) et le

modèle descriptif utilise (par niveau de détail croissant) les concepts de procédures de tâches et d'opérations ; on retrouve donc, à un niveau d'analyse donné, le zoom déjà présent dans les autres approches. Au niveau de l'opération, on retrouve une vision voisine de l'activité de SADT, avec la spécification de ressources requises (baptisées ici outil et ressource en information). C'est au niveau de la tâche que la vision est plus originale puisqu'on lui associe un rôle pour l'exécution et que ces rôles sont ensuite rattachés à des acteurs et des unités fonctionnelles caractérisées par une collection de rôles. La description du processus d'un modèle descriptif reprend sur des bandes verticales un repérage des unités et on retrouve un formalisme qui n'est pas très éloigné de ceux présentés ci-dessus avec, comme dans le modèle STRIM, une visualisation des interactions entre opérations.

En définitive, l'arsenal disponible partage des caractéristiques communes importantes que ne doivent pas masquer les différences de formalismes graphiques proposés. La complexité des processus permet difficilement une vision multi-dimensionnelle de ses composants. On est alors amené à travailler sur des représentations privilégiant certaines dimensions, en fonction de l'éclairage adopté pour l'analyse. Cette multiplicité de regards sur un processus est essentielle pour en comprendre les limites et pouvoir les transformer. Cela étant, il n'y a pas vraiment de méthodologie établie d'amélioration d'un processus, mais seulement l'appel à un certain nombre de principes que nous allons examiner maintenant.

### I-2.4 L'amélioration d'un processus

Table des  
matières

Index  
thématique

Le travail de cartographie d'un processus est mené pour en comprendre le fonctionnement en détail, en juger la pertinence et en faciliter l'amélioration. Dès lors qu'un avis et des propositions doivent être formulés, il est nécessaire qu'au-delà de la définition fonctionnelle du processus (par exemple, traiter les factures des fournisseurs), des objectifs d'efficacité (par exemple, 99 % des factures traitées dans les trois jours ouvrables suivant la réception de la facture) et d'efficience (par exemple, atteindre des objectifs d'efficacité plus contraignants avec les mêmes ressources humaines) soient clairement assignés au processus (Hunt, 1996, [235]). L'amélioration du processus est conditionnée à une réelle volonté de changement, en dépit des obstacles techniques et des pesanteurs socio-organisationnelles.

L'analyse critique du processus implique un repérage des cheminements irrationnels, des délais excessifs et des tâches manquantes ou superflues. Pour faciliter ce diagnostic et disposer de principes d'action, on peut faire appel à un certain nombre de principes bien connus en gestion de la production ainsi qu'à la littérature du *reengineering*<sup>1</sup> qui fournit de nombreuses idées sur les pistes d'amélioration en s'appuyant sur une réflexion apportée aux réponses aux questions classiques «quoi?», «quand?», «comment?», «quoi?». On peut tenter de structurer rationnellement les différentes solutions proposées. Trois pistes doivent être explorées, le poids à accorder à chacune d'entre elles étant lié au diagnostic porté et aux objectifs assignés au processus.

1. Le *reengineering* est présenté au chapitre I, § I-3.2.2, page 72. Parmi les travaux de synthèse sur les principes de réorganisation des processus, on peut citer l'article de Hammer (1990, [214]). Les fondements théoriques de certaines propositions faites par les tenants du *reengineering* trouvent une justification originale par la théorie des files d'attente dans l'article de Peaucelle (2000, [331]).

- Il s'agit tout d'abord d'**éliminer les opérations inutiles**. Le point de vue à privilégier doit être celui de la réelle valeur ajoutée apportée par une activité au client final. De nombreux exemples peuvent être trouvés. Des opérations de pointage, d'archivage de doubles et de saisie multiple d'une même information n'ont pas de valeur pour le client; l'utilisation d'un meilleur système d'information (faisant ou non appel aux ERP / ERM<sup>1</sup>) permet de les éliminer. Les opérations de contrôle de qualité des produits ou de prestations, source importante de délais, peuvent souvent être avantageusement remplacées par les opérations de contrôle de qualité du processus; on verra plus loin qu'une fusion de rôles permet également d'éliminer certains contrôles. Des opérations de stockage et de transport internes n'apportent pas de valeur et peuvent éventuellement être éliminées par une meilleure implantation des ressources. La mise en évidence de ces sources d'amélioration suppose l'usage de cartographies de processus dans lesquelles les activités sont qualifiées en faisant appel à typologies fondées sur cette vision de valeur ajoutée (voir ci-dessus). Il s'agit également de rajouter des **opérations manquantes** dont l'absence perturbe le bon fonctionnement du système (boucles peu justifiées, variabilité non maîtrisée de certaines opérations...): par exemple, dans certains cas, il n'existe pas de bonnes procédures pour les prises de décisions routinières.
- L'usage de cartographies de processus privilégiant le temps (voir [figure 41, page 166](#)) peut mettre en évidence la nécessité de **réduire la durée d'exécution d'un processus**. Sans toucher à la liste des opérations (ce que l'on examinera ensuite), trois pistes sont exploitables.
  - La première idée, évidente, est de chercher à jouer sur la **réduction du temps d'exécution de certaines activités** en les automatisant complètement ou partiellement (SIAD), en fournissant de meilleures informations, en appliquant, si cela est possible, les principes du SMED<sup>2</sup> pour réduire les temps de préparation d'une activité.
  - Faire plus vite connaît vite des limites, il faut alors penser à faire autrement. La durée de traitement d'un objet dans un processus dépend non seulement des temps opératoires, mais aussi de la détermination du chemin critique dont la longueur est tributaire du degré de séquentialité des activités. Il s'ensuit qu'une réduction de la dépendance entre activités, notamment par la dématérialisation de l'information, augmente potentiellement le **parallélisme** des activités et permet, si certaines de ces activités étaient critiques, de réduire le chemin critique.
  - Une dernière source de délai est liée à l'existence de files d'attente devant certaines ressources critiques. La **fluidification du processus** passe par plusieurs mesures: un meilleur ordonnancement assurant une utilisation optimale de ces ressources critiques (un stock tampon pouvant limiter la dispersion des résultats), une réduction de taille de lots de biens ou de dossiers circulant dans le système productif et une amélioration de la conception du système productif et des gammes.
- Si l'on désire diminuer la durée d'exécution d'un processus en acceptant de réviser la liste des opérations, il faut explorer une troisième piste qui consiste

1. Voir le [chapitre XIV, page 957](#), qui traite des ERP / ERM.

2. Voir le [chapitre VII, page 511](#).

à chercher à **fusionner des activités**, ce qui élimine les délais qui existaient entre ces activités. Cette fusion se heurte en général à trois types d'obstacles, chacun d'entre eux pouvant être contourné.

- Le premier obstacle est lié à la *compétence* des individus. Des actions de formation permettent d'obtenir une certaine **polyvalence** permettant un enrichissement des tâches (qui, dans le processus initial pouvaient relever de services différents). Une amélioration de l'accès aux informations pertinentes et l'usage de systèmes - experts ou de systèmes d'aide à la décision permet de reculer considérablement les limites de la polyvalence. La conséquence est une réduction sensible du nombre de personnes nécessaires à la prise en charge de toutes les opérations d'un processus (plusieurs groupes travaillant en parallèle) et l'élimination des délais induits par la séquentialité. S'il n'est pas possible d'obtenir une polyvalence permettant à une personne unique de traiter l'ensemble du processus, il est alors conseillé, pour améliorer l'efficacité du processus, de mettre les clients du processus en contact avec un interlocuteur unique, appelé parfois **gestionnaire de cas**, qui sert d'interface obligée entre le client et la personne en train de travailler pour ce client.
- Le deuxième obstacle est lié à la *complexité* ou à la *difficulté de certains problèmes* qui nécessitent des compétences pointues. Dans ce cas, la polyvalence n'est envisageable qu'au prix d'un accroissement tel du niveau de qualification requis qu'économiquement cette piste est souvent inenvisageable. Une analyse de Pareto sur le degré de complexité des traitements du processus étudié montre habituellement que cette complexité n'affecte qu'une fraction faible du volume des traitements effectués. Si le personnel mobilisé est suffisamment important, une solution efficace consiste à remplacer le processus complexe capable de traiter tous les cas de figure par quelques **processus simplifiés** couvrant plus de 90% des traitements à réaliser et à laisser les cas complexes résiduels à une cellule d'experts. Ces processus simplifiés sont confiés à des opérateurs polyvalents, selon les principes évoqués ci-dessus.

La mise en œuvre de la polyvalence et de la simplification aboutit à une *compression horizontale* de la séquence d'intervenants nécessaires à l'exécution d'un processus.

- Le dernier obstacle est lié au *contrôle hiérarchique*: dans un certain nombre de processus administratifs, on observe classiquement l'exécution d'une série de tâches de type «analyser un problème» - «proposer une solution» - «valider la décision» - «exécuter la décision» - «contrôler l'exécution», souvent confiées à deux catégories acteurs de niveaux hiérarchiques différents. Dans de nombreux cas, la **fusion de rôles** est possible sans modification des compétences requises grâce à la mise en place d'une décentralisation contrôlée de certaines décisions, d'un contrôle automatisé de certains droits et de la mise en place de procédures de gestion par exception. La mise en place de ces principes aboutit à une certaine *compression verticale* de la ligne hiérarchique.

L'exploration méthodique de ces trois pistes conduit normalement à un certain nombre d'idées pertinentes d'amélioration. Certaines d'entre elles sont condi-

tionnées par l'usage des NTIC (nouvelles technologies de l'information et de la communication) dont une démarche inductive permet mettre en évidence de nouveaux champs d'application (voir [chapitre I, page 73](#)). D'autres relèvent de logiques de réorganisation (pouvant prendre appui sur les NTIC). Les plus innovantes d'entre elles s'appuient sur une réflexion sur la possibilité de **délocaliser dans le temps et dans l'espace certains faits générateurs**. L'un des exemples proposés par Hammer et Champy (1993, [215], p. 49) illustre cette idée: le fait générateur du paiement d'un fournisseur est la commande livrée et non le rapprochement d'une facture et d'un certificat de conformité à la commande, des marchandises livrées, à condition de travailler en gestion par exception et d'avoir des fournisseurs fiables.

## SECTION II L'ANALYSE D'UN PROJET D'INVESTISSEMENT

On examinera l'analyse physique d'un projet d'investissement (§ II-1) qui conditionne l'analyse économique de ce projet (§ II-2, page 174). On examinera ensuite l'impact de la précision des informations utilisées au travers d'analyses de sensibilité des résultats (§ II-3, page 185).

### II-1 L'analyse physique d'un projet d'investissement

Il est utile de s'interroger sur la genèse des projets d'investissement (§ II-1.1) pour comprendre certains biais et problème que l'on rencontre classiquement. L'instruction du dossier d'investissement conduit à prendre un certain nombre de précautions méthodologiques (§ II-1.2, page 171).

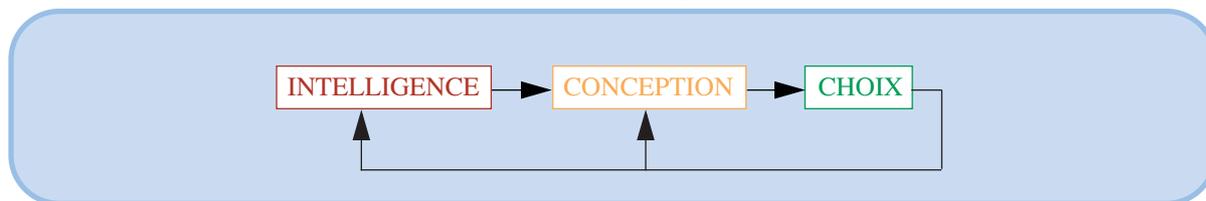
#### II-1.1 L'origine d'un dossier d'investissement

H.A. Simon<sup>1</sup> distingue trois phases dans l'analyse d'un processus décisionnel, ce que résume la [figure 42](#).

- l'étape d'*intelligence* initialise le processus par l'identification d'un problème ou d'une opportunité,
- l'étape de *conception* met en œuvre les processus d'analyse et d'élaboration de solutions envisageables pour répondre au problème posé,
- l'étape de *choix* consiste à sélectionner la meilleure des solutions trouvées.

FIGURE 42

Présentation «rationnelle» du processus de décision



Cette présentation rationnelle du processus décisionnel est très souvent abusivement considérée plus comme normative qu'analytique. Plusieurs questions importantes restent entières, notamment lorsqu'il s'agit de décisions d'investissement. La première est relative à la genèse du problème posé. Simon souligne le rôle des stimuli<sup>2</sup> qui déclenchent la prise de conscience et orientent fortement la

1. Voir Simon (1960, [388]).

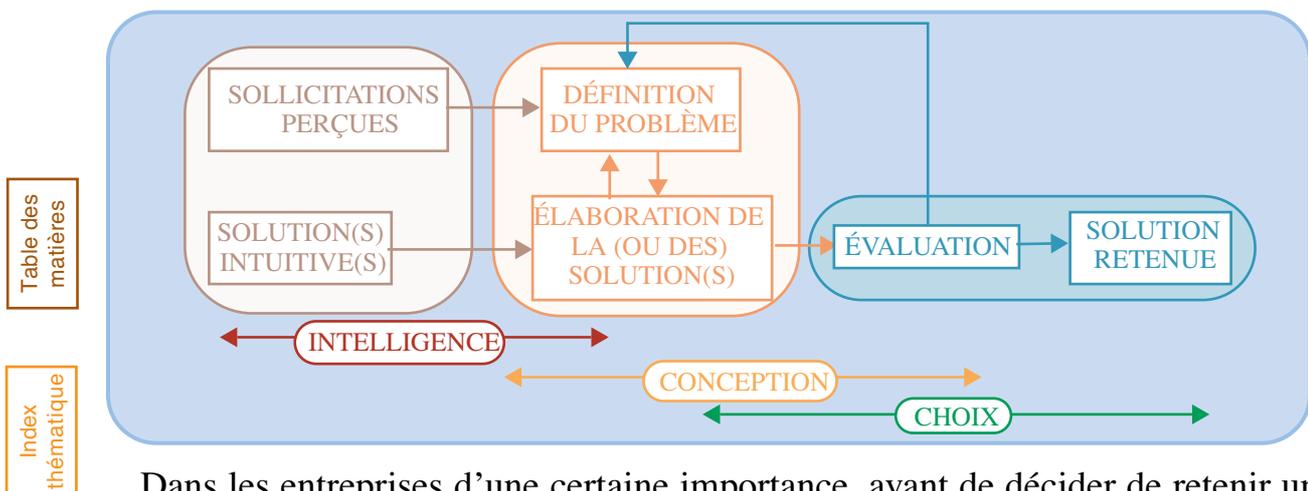
réflexion. Cette idée est reprise sous une forme différente par Pounds<sup>1</sup> pour qui le décideur détecte un problème par différence entre ce qu'il perçoit dans la réalité et une représentation «idéale». Pour lui, trois types de modèles sont utilisables :

- le modèle de type historique (→ «il se passe des choses différentes de ce qui se passe d'habitude»),
- le modèle de type plan (→ «il se passe des choses différentes de ce que l'on avait voulu»)
- et le modèle externe (→ «ailleurs, il se passe des choses différentes de chez nous et c'est mieux»).

On doit ajouter que l'observation montre que bien souvent, un problème est plus ou moins consciemment refoulé tant qu'aucune idée de solution ne se fait jour, ce qui donne un poids particulier au rôle du modèle externe et explique le biais important qui affecte souvent l'étape de conception. La figure 43 illustre les implications de ce point de vue.

FIGURE 43

*Incidence des solutions intuitives sur la formulation d'un problème*



Dans les entreprises d'une certaine importance, avant de décider de retenir un projet d'investissement, il faut d'abord monter un dossier décrivant en détail l'impact physique et organisationnel de l'investissement envisagé (§ II-1). Il faut ensuite en faire l'analyse économique (§ II-1, page 170).

## II-1.2 L'instruction du dossier d'investissement

Dans les entreprises d'une certaine taille, le dossier d'investissement est instruit à l'échelon local par des ingénieurs qui proposent une solution technique à un problème. Ce dossier comporte une description des transformations physiques induites par l'investissement, notamment en ce qui concerne les flux de production; cette analyse se fonde sur un certain nombre d'hypothèses de travail, parfois implicites, qu'il convient de souligner dans le dossier pour éclairer la prise de décision<sup>2</sup>. Il comporte également une valorisation de ces impacts physiques, à l'aide de données tirées de la comptabilité de gestion. Cette étude s'achève parfois

2. Note de la page précédente. Simon (1983, [389]).

1. Pounds (1969, [344]), p. 1-19.

2. Il convient de souligner que certaines hypothèses de travail sont liées à des orientations stratégiques souvent mal connues des acteurs qui instruisent les dossiers.

par le calcul d'indicateurs synthétiques (voir § III-1, page 200) ainsi que la mise en avant de certains éléments, difficilement valorisables, tels que l'amélioration de la qualité des produits ou de la fiabilité des équipements et qui seront d'autant plus facilement avancés que l'argumentaire économique semblera insuffisant pour emporter la décision.

Ce dossier est ensuite analysé à l'échelon central par un service spécialisé qui s'assurera que le dossier est cohérent avec la « ligne stratégique de l'entreprise » et vérifiera très approximativement la vraisemblance du dossier et les calculs opérés. La décision de retenir ou non le dossier est généralement prise presque immédiatement si les sommes engagées sont considérées comme relativement faibles. Elle est différée à une réunion de décision plus formelle (comité des investissements, conseil d'administration...), dans le cas contraire. Le plus souvent, il est trop tard pour remettre en cause les hypothèses du dossier ou certaines options techniques.

L'impression d'ensemble qui prévaut est double.

- On observe très souvent un attachement excessif au traitement des informations numériques du dossier et d'une attention insuffisante sur les conditions de recueil des données et aux hypothèses physiques conditionnant l'étude de rentabilité. Dans ces conditions, il n'est guère étonnant, que de nombreux dossiers d'investissement soient présentés pour corriger des effets indésirables générés par un investissement antérieur ou pour permettre d'atteindre des performances annoncées dans un dossier antérieur et qui n'ont pu être atteintes. On peut ajouter que généralement un seul point de vue est retenu dans l'analyse économique, ce qui peut biaiser la décision (cet aspect sera traité au § II-2.1.1, page 174).
- Le second constat est que la préparation du dossier d'investissement s'accompagne rarement d'une réflexion sur l'adaptation, souvent indispensable, des procédures de pilotage des flux dans le système productif, consécutivement à sa transformation. Par exemple, certains investissements de productivité introduisent des rigidités nécessitant une réorganisation du pilotage. Cette réflexion peut s'appuyer sur la simulation (cf. § I-2.1, page 148) pour tester le réalisme des hypothèses conditionnant la rentabilité du projet. De nos jours, l'instruction de dossiers d'investissement d'une certaine importance suppose donc de travailler avec deux « mailles temporelles » : une maille grossière (découpage annuel ou trimestriel) pour prévoir l'utilisation des nouveaux équipements dans une perspective d'ajustement global « charge - capacité » et une maille fine (découpage de l'ordre de la minute) pour calibrer correctement la capacité effectivement offerte en fonction des procédures et des caractéristiques de la demande.

Pour améliorer les dossiers d'investissement, des efforts doivent être entrepris dans deux directions, en plus de celles citées ci-dessus : il convient de tout mettre en œuvre pour que la vision retenue ne soit pas locale (§ II-1.2.1) et de distinguer deux phases dans la mise en service de nouveaux équipements (§ II-1.2.2, page 173).

### II-1.2.1 La nécessaire prise en compte des mécanismes de propagation

La décision d'investissement, par propagation<sup>1</sup> de ses effets, peut rendre nécessaire l'adaptation de certaines ressources d'autres centres de décision (cf. page

157). Il est donc méthodologiquement incorrect de limiter son évaluation physique et économique du dossier, aux seules conséquences «primaires» sur le centre de décision qui est le siège de la décision initiale. C'est donc à une évaluation sur l'ensemble des centres de décision atteints qu'il faut procéder.

Les mécanismes de propagation sont relativement simples à analyser à partir d'une cartographie des flux utilisant les centres de décisions pertinents pour l'étude:

- Une décision de modification de certaines ressources (hommes, machines, procédures...) est projetée pour un centre. Elle peut induire à son tour une modification de certaines *caractéristiques des flux* émis ou reçus par ce centre (cf. page 159) aussi bien du point de vue de la nature des flux que de leurs volumes ou leurs règles de déclenchement (par exemple, passer à un approvisionnement quotidien, à nature et volume constant, peut engendrer de fortes perturbations; autre exemple, un nouvel équipement s'appuyant sur une nouvelle technologie peut nécessiter des compétences en maintenance différente de celles disponibles en interne).
- Par ricochet, ces modifications de flux entrants ou sortants peuvent perturber le bon fonctionnement des centres atteints (centres émetteurs ou destinataires) qui devront, à leur tour, prendre des *décisions d'adaptation de leurs ressources*, ce qui ramène à l'étape précédente.

Ces mécanismes posent le problème de la détermination des frontières de la propagation dans le temps et dans l'espace. Sur le plan des principes, la réponse est simple: si les modifications des caractéristiques de certains flux restent dans les limites de variabilité que les ressources du centre atteint «savent traiter» sans qu'il soit nécessaire de les modifier, la propagation potentielle induite par ce flux s'arrête.

Table des matières

Index thématique

### II-1.2.2 Les phases de la transformation du processus

La décision étudiée étant une décision d'investissement, il est utile de distinguer deux phases dans l'étude des conséquences physiques des transformations des ressources (en équipements, machines, ressources informationnelles ou procédurales) et qui se traduit par des variations de charges et/ou avantages par rapport au statu quo:

- du **régime transitoire** est la durée au cours de laquelle les charges (trop souvent sous-estimées) correspondent aux efforts temporaires qui doivent être supportés par le système pour passer d'un certain niveau qualitatif et/ou quantitatif de ses ressources, procédures et prestations, au niveau visé par la prise de décision<sup>1</sup>; il s'agit des charges induites notamment par les actions de formation, la phase d'installation, de modification et de démarrage de biens d'équipement, la période d'apprentissage du personnel, la mobilisation limitée dans le temps de personnels intérimaires, d'heures supplémentaires et de moyens complémentaires...; cela dit, la distinction entre les charges ponctuelles d'adaptation, les charges du régime transitoire et les charges

1. Note de la page précédente. Ces mécanismes de propagation des effets d'une transformation du système productif ne doivent pas être confondus avec ceux de la propagation de perturbations se produisant en production qui seront abordés au chapitre X, page 623.

1. Ce point est à rapprocher de ce que le *kaizen* appelle la maintenance des processus (voir chapitre I, page 70).

répétitives du régime de croisière n'est pas sans poser parfois des problèmes pratiques.

- le **régime de croisière**, qui suit le régime transitoire, débute lorsque toutes les caractéristiques des ressources (équipements, hommes) sont celles désirées, ainsi que celles des flux transitant par les centres de décision concernés.

Trop souvent, les dossiers d'investissement négligent le régime transitoire ainsi que les effets de propagation. À la surestimation de l'intérêt du projet qui en résulte s'ajoute une désorganisation souvent plus dommageable qu'il était possible d'éviter.

## II-2 L'analyse économique d'un projet d'investissement

Le dossier d'investissement s'accompagne d'une étude économique chiffrée décrivant les conséquences économiques du projet sous forme d'échéanciers de valeurs allant jusqu'à la fin de l'horizon économique retenu. Cette étude est souvent qualifiée de **bilan économique**. Un premier problème se pose, celui du système de coûts à utiliser dans ce type d'étude. Comme on le verra (§ II-2.1), plusieurs points de vue peuvent être retenus et conduisent à des évaluations différentes.

La comparaison de projets d'investissement conduit à rechercher un indicateur synthétique (ce problème sera étudié en détail au § III-1, page 200) parmi lesquels ceux faisant appel à l'actualisation sont considérés comme les plus pertinents. L'introduction de l'actualisation dans le bilan économique conduit à ce que l'on appelle un **bilan actualisé**. Le calcul du bilan actualisé d'un projet pose le problème de la détermination de l'échéancier de **Flux Nets de Trésorerie** (notés **FNT**) d'un projet (§ II-2.2, page 176), c'est-à-dire la variation de flux de trésorerie réalisée au cours de la période  $t$  délimitée par les dates ponctuelles  $t - 1$  et  $t$ ; ces informations seront ensuite résumées par l'un des indicateurs synthétiques.

### II-2.1 Le système de coûts à utiliser

L'analyse physique d'un projet d'investissement met d'abord en évidence des flux de consommation de biens et de service et d'utilisation de prestations d'équipements et outillages, en plus de dépenses d'investissement. La valorisation de certains de ces flux implique l'usage d'un système de coûts sur lequel il convient de s'interroger, puisque les conventions sous-jacentes doivent être compatibles avec l'objectif retenu pour l'éclairage économique. Deux problèmes différents se posent: celui de la multiplicité des points de vue à retenir (§ II-2.1.1) et celui de la cohérence temporelle des décisions (§ II-2.1.2, page 176).

#### II-2.1.1 Multiplicité des points de vue et donc des conventions de comptabilité de gestion possibles

Les décisions prises par les acteurs qui instruisent ou évaluent un dossier comportent une dimension socio-organisationnelle importante (§ I-2.2, page 155) qui conduit à s'interroger sur les utilisateurs des informations produites. L'évaluation d'une décision varie nécessairement selon le niveau d'observation de l'acteur<sup>1</sup>. En effet, pour un centre de décision donné, une modification du portefeuille de ressources qui lui est affecté se traduit par une modification de charges

à supporter. Cela dit, cette modification de portefeuille de ressources d'un centre ne se traduit pas forcément par une modification équivalente et immédiate pour l'entreprise.

Pour illustrer ce point, prenons l'exemple d'un centre de décision donné où un investissement de productivité peut s'accompagner d'une diminution du nombre d'ouvriers nécessaires se traduisant par une diminution de charges d'exploitation :

- Pour le *responsable de ce centre* (et donc sur un périmètre spatial étroitement défini), l'économie de personnel que permet l'investissement se traduit par une diminution de ses charges d'exploitation. L'usage de ce mode d'évaluation conventionnel, s'appuyant largement sur des *coûts standards*, constitue une incitation puissante à l'amélioration continue des performances de l'entreprise.
- Si l'on considère maintenant le point de vue du *propriétaire de l'entreprise* et donc si l'on élargit le périmètre spatial à l'ensemble de l'entreprise, les conclusions sont plus nuancées et peuvent même être radicalement différentes. Cette remise à disposition de personnel peut conduire à un licenciement du personnel devenu inutile (auquel cas, il y a coïncidence d'évaluation) ou à une nouvelle affectation de ce personnel (avec ou sans formation complémentaire) en remplacement du personnel partant en retraite ou, enfin, à un maintien en activité de ce personnel « surnuméraire » sans qu'il y ait une utilité technique réelle (mais, une utilité sur le plan du climat social). Au niveau de l'entreprise, il ne faut donc retenir que les *modifications effectivement observables de flux de trésorerie* dont on est certain en réalisant le projet.

Table des matières

Index thématique

Cette double approche est indispensable et la vérité économique se situe quelque part entre les deux évaluations. En effet, la « consolidation » d'une décision permettant de diminuer d'une demi-personne-année-travail la charge d'un centre, par toute autre décision prise ailleurs et ayant des effets similaires, peut permettre une économie en flux de trésorerie qu'aucune de ces deux décisions ne permet à elle seule d'atteindre. Ces deux évaluations économiques de la décision seront d'autant plus proches que le degré de synergie de l'ensemble des décisions stratégiques prises sera élevé. Les conséquences de tels effets de synergie échappent, en général, à l'analyse du projet étudié. Cette incapacité à planifier des projets à partir d'une consolidation des réalisations passées et d'une anticipation des choix futurs conduit souvent à une gestion myope de la stratégie de l'entreprise : beaucoup de projets n'ont de sens que parce qu'ils préparent d'autres projets à venir dont les gains et les avantages retirés justifieront les premières décisions. On peut noter enfin que cette double logique d'évaluation économique des décisions s'articule parfaitement avec la tendance organisationnelle actuelle des entreprises qui consiste à motiver et responsabiliser les acteurs en leur fournissant des outils locaux de gestion et d'évaluation (tableaux de bord d'indicateurs...) et, en même temps, à les inciter à adopter des stratégies d'amélioration de performances globales de l'entreprise (qualité « totale », délai de fabrication...) au prix même d'une dégradation de performances locales.

1. Une discussion approfondie de ce problème peut être trouvée dans l'article de Fray et Giard (1990, [134]). Ce point a déjà été abordé au [chapitre II, § II-2.2, page 121](#).

À partir d'une même quantification en volume, les actions d'adaptation des ressources et leurs conséquences sur le fonctionnement du système productif devrait toujours être valorisées suivant une logique de coûts conventionnels et suivant une logique de coûts de «trésorerie». Quelques principes simples peuvent être énoncés pour déterminer de tels coûts, dans chaque centre de décision concerné.

- En cas de *modification d'utilisation des ressources disponibles* dans un centre :
  - le coût conventionnel doit être calculé sur la base du potentiel disponible et non sur celle du potentiel réellement utilisé; cette règle a pour effet de permettre sans difficulté une agrégation par simple additivité de charges calculées selon cette méthode et d'autoriser un calcul économique non ambigu de la marge de manœuvre résiduelle du centre;
  - le coût de trésorerie d'une telle modification de ressources physiques ou informationnelles disponibles est nul.
- En cas de variation d'utilisation de *flux de prestations de services*, il convient, pour éviter une double comptabilisation des charges, d'affecter conventionnellement les coûts de variation de flux de prestations de service ou d'informations au CD qui les produit, de préférence au CD qui les consomme parce qu'il y a plus de chances que les éléments constitutifs de ces coûts soient mieux connus au niveau du centre produisant les prestations.
- Dans le cas d'*achat ou de vente à l'extérieur de l'entreprise*, il y a coïncidence entre le coût conventionnel et le coût de trésorerie.

### II-2.1.2 Conventions comptables et cohérence temporelle des décisions

Il ne suffit pas de prendre en compte correctement la multiplicité des points de vue à retenir, il faut en outre vérifier dans quelle mesure les conventions comptables utilisées permettent d'assurer un minimum de cohérence temporelle des décisions.

Le projet d'investissement étudié peut se caractériser par un périmètre restreint, en ce sens que les ressources mobilisées sont essentiellement celles étudiées dans le projet d'investissement, ce qui est généralement le cas si l'on est en présence d'un investissement de remplacement. Par contre, lorsque le projet porte sur le lancement d'un produit nouveau, habituellement, la fabrication envisagée fait en partie appel à des équipements existant et utilise des composants que fabrique déjà l'entreprise. Le système de prix de cession utilisé dans l'analyse économique de tels projets n'est pas neutre à la fois sur la rentabilité du projet et sur la cohérence temporelle des décisions. Ces problèmes sont traités au [chapitre II, § II-2.4.1, page 124](#) où l'on montre que la cohérence temporelle des décisions passe par l'usage de l'amortissement économique.

### II-2.2 Détermination des flux nets de trésorerie (FNT) à prendre en compte dans les bilans actualisés

Le bilan effectué est nécessairement un bilan différentiel (§ II-2.2.1) qui oblige à bien spécifier une solution de référence. Quelle que soit la technique utilisée pour évaluer les conséquences financières du projet, celles-ci peuvent être décrites par leurs incidences sur les comptes de résultat et sur les bilans comptables (§ II-

2.2.2, page 177). On examinera enfin comment prendre en compte l'inflation dans la détermination des flux et les calculs d'actualisation (§ II-2.2.3, page 182).

### II-2.2.1 Le principe du bilan différentiel

L'analyse d'une décision managériale doit s'effectuer par comparaison à une décision alternative que l'on considère comme une solution de référence. Implicitement il y a toujours au moins une solution de référence qui est du type «ne pas prendre de décision et subir passivement les modifications de l'environnement technico-économique». Décider de faire quelque chose à un moment donné avec certains moyens, c'est renoncer à faire autre chose au même moment avec ces mêmes moyens. L'analyse économique d'un investissement conduit donc à définir explicitement une solution alternative de référence<sup>1</sup>. La comparaison des conséquences physiques (ou financières) du projet d'investissement s'effectue donc par une analyse des variations physiques (ou financières) induites par la solution nouvelle, par rapport à cette solution de référence. On utilise l'expression **bilan différentiel** pour décrire ce type d'analyse, le terme bilan étant à prendre dans son acception générale et non comptable. Dans cette analyse, il n'est pas nécessaire de tout expliciter puisqu'en définitive seuls comptent les éléments qui sont modifiés par les décisions prises. Le raisonnement différentiel limite le recueil des données à opérer, mais reste très fortement conditionné par le choix de la solution de référence.

### II-2.2.2 La traduction comptable des flux de trésorerie

La variation de flux nets de trésorerie  $\Delta FNT_t$  de la période  $t$ , c'est-à-dire la variation de flux de trésorerie réalisés au cours de la période  $t$  (délimitée par les dates ponctuelles  $t-1$  et  $t$ ) et obtenue par différence entre les Flux Nets de Trésorerie  $FNT_{t,1}$  de la solution étudiée et les Flux Nets de Trésorerie  $FNT_{t,0}$  de la solution de référence ( $\Delta FNT_t = FNT_{t,1} - FNT_{t,0}$ ), sont liés à :

- à la comparaison, entre les deux solutions, des opérations d'exploitation réalisées au cours de cette période  $t$  et se traduisant par des variations de flux nets de trésorerie  $\Delta FNT_t^c$  décrites au compte de résultats (§ II-2.2.2.1) et correspondant à la **variation de la capacité d'autofinancement de l'exercice** pour l'entreprise; la longueur de l'exercice joue un rôle important car sa plus ou moins grande amplitude autorise ou non des compensations entre flux de sens contraire; dans l'exemple présenté, on retiendra la période annuelle qui correspond à des traditions comptables bien établies, mais rien n'empêche de retenir dans les calculs une période plus courte, en particulier pour analyser le régime transitoire associé au démarrage d'un investissement;
- à la comparaison, entre les deux solutions, des opérations d'investissement et / ou de financement réalisées au cours de cette période  $t$  et se traduisant par des variations de flux de trésorerie  $\Delta FNT_t^b$  décrites par le rapprochement des bilans établis aux dates  $t-1$  et  $t$  (§ II-2.2.2.2, page 181).

La variation de flux net de trésorerie  $\Delta FNT_t$  théoriquement observable sur la période  $t$  est donc :

1. Ce principe a été mis en avant par Clark après la première guerre mondiale dans un ouvrage resté célèbre (1923, [95]).

$$\Delta FNT_t = \Delta FNT_t^c + \Delta FNT_t^b \quad \text{relation 13}$$

La variation de Flux Nets de trésorerie Actualisés  $\Delta FNTA$  de la solution étudiée en comparaison avec la solution de référence, correspond à valeur actualisée, à la date 0 et pour le taux d'actualisation  $\alpha$ , de cet échéancier  $\Delta FNT_t$  de flux nets de trésorerie :

$$\Delta FNTA = \sum_{t=0}^T \frac{\Delta FNT_t}{(1+\alpha)^t} = \sum_{t=0}^T \frac{\Delta FNT_t^c}{(1+\alpha)^t} + \sum_{t=0}^T \frac{\Delta FNT_t^b}{(1+\alpha)^t} = \Delta FNTA^c + \Delta FNTA^b \quad \text{relation 14}$$

### II-2.2.2.1 Les flux nets de trésorerie décrits à travers le compte de résultat

Examinons la variation du compte de résultat prévisionnel d'une entreprise consécutive à une décision d'investissement et / ou de financement. En pratique, il est conseillé d'isoler les variations consécutives à chaque décision et notamment de *dissocier les projets d'investissement, des projets de financement*. La structure de ce compte que nous utiliserons ici est simplifiée, mais on y retrouve le modèle comptable classique de détermination de la capacité d'autofinancement de l'exercice, en supposant que l'impôt de l'exercice est calculé et versé en fin d'exercice (on lèvera cette hypothèse simplificatrice ultérieurement).

La démarche suivie est illustrée dans le [tableau 9](#), qui décrit les notations utilisées. Ce tableau comporte les calculs pour la solution de référence, la solution nouvelle et la différence des solutions; il fournit également l'expression analytique à utiliser pour calculer la variation de flux de trésorerie imputable au compte de résultat dans le cas des hypothèses simplificatrices retenues.

La variation  $\Delta FNT_t^c$  du flux net de trésorerie théoriquement observable sur le compte de résultat au cours de l'année  $t$  est donc :

$$\Delta FNT_t^c = \theta \Delta A_t + (1 - \theta) [\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta F_t)] \quad \text{relation 15}$$

Cette [relation 15](#) amène neuf remarques.

a) On en déduit immédiatement ([relation 16](#)) la variation  $\Delta FNTA^c$  des flux nets de trésorerie actualisés observable sur le compte de résultat :

$$\Delta FNTA^c = \theta \Delta FNTA^c_{\text{Amortissement } A} + (1 - \theta) [\Delta FNTA^c_{\text{Produits } P} - (\Delta FNTA^c_{\text{Dépenses } D} + \Delta FNTA^c_{\text{Frais financiers } F})] \quad \text{relation 16}$$

b) L'incidence sur la trésorerie de la variation des postes est correctement prise en compte par la [relation 15](#), ce qui implique que chaque variation doit bien être calculée sur la base de la différence des montants positifs de la solution nouvelle et de la solution de référence, sans tenir compte du fait que le poste considéré correspond normalement à un encaissement ou à un décaissement. C'est ainsi que la variation de dépenses est, dans l'exemple,  $\Delta D_t = -7$  (ce qui correspond à une économie de dépenses), dont l'incidence finale est, d'après la formule  $-(1 - \theta) \Delta D_t$ , ce qui a un impact positif sur le flux de trésorerie en cas d'économie de dépenses et un impact négatif, dans le cas contraire.

c) Le projet étudié peut impliquer de ne prendre en compte que certaines des variables introduites ( $A_t$ ,  $P_t$ ,  $F_t$  et  $D_t$ ): par exemple, un investissement de productivité pure ou un problème de choix entre des variantes de financement

TABLEAU 9  
Les flux nets de trésorerie décrits dans le compte de résultat (simplifié)

		Solution <i>i</i>		$\Delta$ (différence)
		de référence ( <i>i</i> = 0)	nouvelle ( <i>i</i> = 1)	
<b>Produits</b>	Produits $P_t$	$P_{0t} = 200$	$P_{1t} = 202$	$\Delta P_t = P_{1t} - P_{0t}$ $= + 2$
<b>Charges</b>	Dépenses courantes d'exploitation $D_t$	$D_{0t} = 100$	$D_{1t} = 93$	$\Delta D_t = D_{1t} - D_{0t}$ $= - 7$
	Amortissement (+ provisions) $A_t$	$A_{0t} = 50$	$A_{1t} = 60$	$\Delta A_t = A_{1t} - A_{0t}$ $= + 10$
	Frais financiers $F_t$	$F_{0t} = 20$	$F_{1t} = 24$	$\Delta F_t = F_{1t} - F_{0t}$ $= + 4$
	Revenus soumis à impôt sur les sociétés (IS) au taux $\theta$ : $P_t - (D_t + A_t + F_t)$	$200 - (100 + 50 + 20)$ $= 30$	$202 - (93 + 60 + 24)$ $= 25$	$2 - (-7 + 10 + 4)$ $= - 5$
	Impôt sur les sociétés $M_t = \theta[P_t - (D_t + A_t + F_t)]$ $M_t$	$M_{0t} = 12$	$M_{1t} = 10$	$\Delta M_t = M_{1t} - M_{0t}$ $= - 2$
	Résultat après impôt $B_t = (1 - \theta)[P_t - (D_t + A_t + F_t)]$ $B_t$	$B_{0t} = 18$	$B_{1t} = 15$	$\Delta B_t = B_{1t} - B_{0t}$ $= - 3$
$\Delta FNT_t$ décrit dans le compte de résultats (= variation de la capacité d'autofinancement de l'exercice): $\Delta FNT_t = \Delta A_t + \Delta B_t = \Delta A_t + (1 - \theta)[\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta A_t + \Delta F_t)]$ $= \theta \Delta A_t + (1 - \theta)[\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta F_t)]$ Application: $0,4 \times 10 + 0,6 \times [2 - (-7 + 4)] = +10 - 3 = + 7$				

Table des matières

Index thématique

- d'un équipement (achat, location, leasing...) n'ont aucun impact sur les produits ( $P_t$ ), une solution de location n'a aucun impact sur les frais financiers ( $F_t$ ) et les amortissements ( $A_t$ ), etc.
- d) La variation du  $FNT_t$  imputable aux dépenses  $F_t$  et  $D_t$  peut se décomposer en  $(-\Delta F_t + \theta \Delta F_t)$  pour les frais financiers et  $(-\Delta D_t + \theta \Delta D_t)$  pour les dépenses courantes d'exploitation. Dans la mesure où la solution nouvelle accroît la valeur de ces dépenses, on considère que l'impact réel de ces accroissements de dépense sur la variation de  $FNT_t$  est  $(-\Delta F_t - \Delta D_t)$  diminué de  $(\theta \Delta F_t + \theta \Delta D_t)$ . Cette dernière expression s'analyse comme une économie d'impôt sur les sociétés. Autrement dit, le fait d'atténuer le montant de l'assiette de l'impôt de  $\Delta F_t + \Delta D_t$ , fait que l'on paiera  $\theta (\Delta F_t + \Delta D_t)$  d'impôt en moins. Cette économie d'impôt n'est réalisée que si l'exercice est bénéficiaire dans la solution de référence et dans la solution nouvelle, sinon une analyse spécifique s'impose.
- e) Une analyse similaire pour les amortissements montre que l'accroissement d'amortissement  $\Delta A_t$  conduit à une diminution de même ampleur de l'assiette de l'impôt  $(-\Delta A_t)$ , et donc à une économie d'impôt de  $\theta \Delta A_t$ , ou, ce qui revient au même, à une variation du bénéfice après impôt imputable au seul  $\Delta A_t$ , de  $-(1 - \theta) \Delta A_t$ . Mais ici, à la différence des postes  $D_t$  et  $F_t$ , l'amortissement est une composante «directe» du  $FNT_t$ , ce qui fait que l'impact de la variation des dotations d'amortissement est  $\Delta A_t - (1 - \theta) \Delta A_t = \theta \Delta A_t$ ; ce

dernier terme s'analyse donc à la fois comme une économie d'impôt par la variation des amortissements et comme l'incidence finale de la variation des amortissements sur celle du flux net de trésorerie.

- f) La **relation 15** reste valable en cas d'absence d'impôt sur les bénéfices ( $\theta = 0 \Rightarrow (\Delta FNT_t^c = [\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta F_t)])$ ) ce qui peut être le cas de certains «organismes public» procédant à des bilans actualisés ou d'une analyse que l'on souhaite conduire «hors incidence fiscale».
- g) En cas de versement de l'impôt sur les bénéfices à une date différente de celle de clôture de l'exercice (par exemple, paiement d'impôt sur les sociétés au 31 mars pour un résultat calculé sur l'exercice civil de l'année antérieure), il est nécessaire de calculer séparément la variation du montant de l'impôt sur les sociétés qui est, d'après ce qui a été vu dans le **tableau 9 de la page 179**:

$$\Delta FNTA_{ImpotsM}^c = \theta[\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta A_t + \Delta F_t)] \quad \text{relation 17}$$

Ce raffinement implique l'usage d'un découpage temporel plus fin et s'inscrit naturellement dans le cadre d'analyses plus fines des recettes et dépenses, ce que l'on va voir maintenant.

- h) On peut vouloir travailler directement sur des flux de dépenses ou de recettes dont la périodicité n'est pas annuelle (salaires mensuels, charges trimestrielles, etc.), sans agrégation de ces valeurs pour les ramener ponctuellement en fin de période. On combine alors les démarches ayant conduit à la **relation 16 de la page 178** (actualisation séparée de ces flux) et à la **relation 17** (explicitation de l'impôt sur les sociétés, qui implique le calcul du cumul des flux sécrétés au cours de l'exercice fiscal). La variation  $\Delta FNTA^c$  des flux nets de trésorerie actualisés observable sur le compte de résultats est donnée par la **relation 18**, dans laquelle les différents  $\Delta FNTA$  d'un poste donné (produits, dépenses, etc.) sont, en réalité, le cumul des FNTA des composantes élémentaires de ce poste sur lesquelles on a voulu travailler.

$$\Delta FNTA^c = \Delta FNTA_{Produits}^c - (\Delta FNTA_{Dépenses}^c + \Delta FNTA_{Frais financiers}^c + \Delta FNTA_{ImpotsM}^c) \quad \text{relation 18}$$

- i) Cette **relation 18** implique que la variation  $\Delta FNTA^c$  des flux nets de trésorerie actualisés observable sur le compte de résultats est la différence de la variation des flux nets de trésorerie «hors impôt sur les sociétés» ( $\theta = 0$ ) observable sur le compte de résultats et de la variation des flux d'impôt sur les sociétés (donnée par la **relation 17**).

**Exemple:** Supposons, par exemple, que l'on étudie un projet d'investissement dont l'horizon économique est de 4 ans et qui se caractérise, par rapport à la solution de référence, par une variation d'amortissement de +500, une variation mensuelle de recettes  $\Delta P_t$  de +5 et une variation mensuelle de dépenses «courantes» d'exploitation  $\Delta D_t$  de -10 (économie de dépense); supposons en outre que le taux d'imposition  $\theta$  soit de 40% et que le taux (annuel) d'actualisation soit de 10%. Comparons les deux raisonnements étant entendu que, dans les deux cas, il faut ensuite tenir compte de l'incidence des flux nets intervenant au bilan (cf. § II-2.2.2.2).

- **Raisonnement sur flux annualisés:** les variations annuelles sont:  $\Delta P_t = 5 \times 12 = 60$ ,  $\Delta D_t = -10 \times 12 = -120$ ,  $\Delta A_t = 500$ ,  $\Delta M_t = 0,4 \times [60 - (-120 + 500)] = -128$  (ce qui s'interprète comme une économie d'impôt). Le raisonnement s'appuyant sur des flux annuels de fin de période conduit à actualiser un échéancier constant de  $0,4 \times 500 + 0,6 \times$

$(60+120) = 308$  (en application de la [relation 15](#), page 178). La valeur actualisée à 10 % de cet échéancier est 976,32. On peut ajouter :

- que l'on aurait pu faire également appel à la [relation 18](#) : la valeur actualisée de l'échéancier annuel de variation de recettes (60) est 190,19, celle l'échéancier mensuel de variation de dépenses (- 120) est  $-(-380,38) = 380,38$ , tandis que celle l'échéancier annuel de variation d'impôt reste inchangée (405,74); ceci conduit bien à  $\Delta FNTA^c = 976,32$ ;
- que cette valeur actualisée est proche de celle qui sera obtenue en partant des flux réels; ceci explique, compte tenu de la précision des données manipulées que l'on travaille souvent sur des flux annualisés.
- *Raisonnement s'appuyant sur les flux réels*: on est alors conduit à utiliser le taux d'actualisation mensuel  $1,1^{1/12} - 1 = 0,797414\%$ . La valeur actualisée de l'échéancier mensuel de variation de recettes (+ 5) est 198,76, celle l'échéancier mensuel de variation de dépenses est  $-(-397,52) = 397,52$  et celle l'échéancier annuel de variation d'impôt (- 128) est 405,74, ce qui conduit à  $\Delta FNTA^c = 1002,02$ .

### II-2.2.2.2 Les flux nets de trésorerie décrits à travers le bilan

La variation  $\Delta FNT_t^b$  du flux net de trésorerie théoriquement observable sur la variation de bilan entre les bilans de début et de fin de l'année  $t$  est imputable à :

- La **variation d'investissement** réalisé l'année  $t$  entre la solution nouvelle et la solution de référence induit une variation de décaissement  $\Delta(-I_t)$  trouvant immédiatement sa contrepartie dans une variation des immobilisations de l'actif. Ces investissements n'interviennent que certaines années et peuvent ne pas concerner la solution de référence. Du point de vue de la trésorerie, l'investissement se traduit par un décaissement et donc *directement* par un flux de trésorerie *négatif*. Supposons, par exemple, que, dans la solution de référence, les investissements prévus s'élèvent à 320 et à 350, dans la solution nouvelle; la variation du flux net de trésorerie imputable à l'investissement sera donc:  $\Delta(-I_t) = (-350) - (-320) = -30$ , ce qui correspond bien à l'accroissement de décaissements lié au remplacement de l'investissement de la solution de référence par celui de la solution nouvelle. Par ailleurs, ces investissements donnent lieu ensuite à des amortissements au bilan, mais ceux-ci sont déjà comptabilisés dans le compte de résultat<sup>1</sup>. Bien entendu, la revente d'un équipement est à considérer comme une opération symétrique de celle de son acquisition (et donc avec un flux de trésorerie positif). La même notation  $I_t$  est donc utilisée pour tous les flux d'achat ou de revente d'équipements. On peut ajouter que ces opérations ont une incidence sur la détermination des impôts et taxes calculés sur la base de la valeur nette comptable (impôts pris en compte dans les dépenses d'exploitation  $D_t$ ).
- Le produit  $E_t$  d'un **emprunt** réalisé l'année  $t$  correspond à un flux de trésorerie *positif* qui provoque des variations simultanées et d'amplitude égale de postes de l'actif et du passif (valeurs réalisables ou disponibles et des dettes à long et moyen terme). Au cours de l'année  $t$ , on peut, au contraire, rembourser une partie de l'emprunt pour un montant  $E_t$  (auquel s'ajoutent les frais financiers pris déjà en compte dans le compte de résultat), ce qui corres-

1. Si les solutions nouvelles et de référence ne diffèrent que sur deux variantes d'un même équipement, mis en service à une même date et amortis de la même manière, il est alors évident que les signes du  $\Delta I_t$  et des  $\Delta A_t$ , pour les périodes  $t$  où les amortissements interviennent, sont inverses.

pond à un flux de trésorerie *négalif*  $E_t$  (la même notation  $E$  étant utilisée pour tous les flux d'emprunt ou de remboursement de l'emprunt). Dans le bilan économique, c'est la différence  $\Delta E_t$  entre les valeurs de la solution nouvelle et de la solution de référence qui sera prise en compte.

- Certaines décisions (caution d'une location par exemple) peuvent entraîner des «*immobilisations de disponibilités financières*», et donc une diminution de la trésorerie disponible, les sommes gelées étant théoriquement récupérables la dernière année de l'horizon économique retenu, et de ce fait incluses dans le flux net de trésorerie de la dernière année. Ces investissements financiers, notés  $G_t$ , correspondent notamment aux dépôts de garantie et à leurs ajustements (rendus nécessaires par l'inflation, en particulier) qui se traduisent par un transfert de créances (diminution de «Banque et caisse», et donc un flux de trésorerie négatif, compensée par un accroissement de «créances sur tiers»). Doit être également considéré comme investissement financier, l'accroissement du besoin en fonds de roulement directement lié à la décision étudiée et qui est rendu nécessaire par l'accroissement de l'activité et/ou de l'inflation. Dans le bilan économique, c'est la différence  $\Delta G_t$  entre les valeurs de la solution nouvelle et de la solution de référence qui sera prise en compte.

L'impôt sur les sociétés n'affecte en rien les variations de postes du bilan. L'incidence finale  $\Delta FNT_t^b$  des variations des postes du bilan sur la variation de flux net de trésorerie entre les deux solutions étudiées est donc :

$$\Delta FNT_t^b = \Delta(-I_t) + \Delta G_t + \Delta E_t \quad \text{relation 19}$$

On en tire la relation générale suivante :

$$\Delta FNT_t = [\theta \Delta A_t + (1 - \theta)(\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta F_t))] + [\Delta I_t + \Delta G_t + \Delta E_t] \quad \text{relation 20}$$

### II-2.2.3 La prise en compte de l'inflation

Quand elle n'est pas négligeable, l'inflation est la source de bien des malentendus en gestion car elle biaise toutes les informations chiffrées disponibles pour des périodes différentes (bilan, compte d'exploitation générale, études économiques prospectives). Sa prise en compte dans les calculs de bilans actualisés peut se faire, sous certaines conditions, en raisonnant à partir des données réelles, c'est-à-dire en euros courants (§ II-2.2.3.1). On peut également raisonner sur des unités monétaires qui gardent le même pouvoir d'achat (§ II-2.2.3.2, page 183). Parfois certains calculs sont effectués en supposant que les prix sont stables (§ II-2.2.3.3, page 185), ce qui a peu de chances d'être correct.

#### II-2.2.3.1 Le raisonnement en euros courants

Prenons l'exemple d'un projet d'investissement en cours d'exécution au cours du second semestre 2001, conduisant à une mise en service au 1<sup>er</sup> janvier 2002 pour une exploitation durant 5 ans (2002 à 2006). Les dépenses annuelles d'exploitation de l'année 2002 sont les suivantes, exprimées aux conditions économiques du 30 juin 2001 : dépenses de matières = 200, dépenses de main-d'œuvre = 500. Si l'on prévoit, pour les années à venir, un taux moyen d'inflation de 5% pour le poste «matières» et de 8% pour le poste «main-d'œuvre», les

dépenses prévisionnelles pour 2006 (exprimées en unités monétaires de cette époque), soit 5 ans plus tard, sont :

$$x_{2006} = 200 \times 1,05^{2006-2001} + 500 \times 1,08^{2006-2001} = 989,92$$

Supposons que le taux d'actualisation à utiliser pour le bilan actualisé soit de 10% /an, ce taux étant exprimé en euros courants (c'est-à-dire non corrigé de l'inflation), la valeur actualisée  $\overline{x}_{2006}$  de  $x_{2006}$  est :

$$\overline{x}_{2006} = 989,92 \times 1,1^{2001-2006} = 989,92 \times 1,1^{-5} = 614,66$$

Un tel raisonnement, retracé dans les avant-dernières colonnes des tableaux 10 et 11, ne maniant que des grandeurs effectivement observables aux différentes périodes, est dit **raisonnement en euros courants**.

TABLEAU 10  
*Prévisions de dépenses en euros courants et en euros constants*

Postes de dépense	Coût annuel au 30 juin 2001	Taux d'inflation prévisionnel	Dépenses prévisionnelles au 30 juin 2003 exprimées en	
			euros courants du 30 juin 2006 (F <sub>2006</sub> )	euros constants du 30 juin 2001 <sup>1</sup> (F <sub>2001</sub> )
Matières	200	5% an	$200 \times 1,05^5 = 255,26$	$255,26 \times 1,07^{-5} = 181,99$
main-d'œuvre	500	8% an	$500 \times 1,08^5 = 734,66$	$734,66 \times 1,07^{-5} = 523,81$
Total	700	7% an <sup>2</sup>	989,92 F <sub>2006</sub>	705,80 F <sub>2001</sub>

1. Voir explication au § II-2.2.3.2.

2. Voir explication au § II-2.2.3.2.

TABLEAU 11

*Actualisation avec taux exprimés en euros courants et en euros constants*

Taux d'actualisation	10% an en euros courants	$1,1/1,07 - 1 = 2,804\%$ an en euros constants <sup>1</sup>
Valeur actuelle au 30 juin 2001 de la dépense du 30 juin 2006	$989,92 \times 1,1^{-5} = 614,66$	$705,80 \times 1,028^{-5} = 614,66$

1. Voir explication au § II-2.2.3.2, page 183.

### II-2.2.3.2 Le raisonnement en euros constants

Dans le **raisonnement en euros constants**, ce qui est constant c'est un certain pouvoir d'achat attaché à l'unité monétaire. Ce pouvoir d'achat dépend de la structure de consommation choisie, il est donc très variable d'un pays à l'autre ou d'une entreprise à une autre. L'indice de prix retenu dans un bilan actualisé dépendra donc de l'objectif retenu par celui qui effectue l'étude. Supposons, dans notre exemple, qu'il a été décidé de retenir l'indice des prix du Produit Intérieur Brut (auquel il est très souvent fait appel en pratique), pour exprimer le bilan actualisé en euros de juin 2001 (on dit encore : aux conditions économiques de juin 2001) et que la prévision moyenne faite pour le taux d'inflation du PIB soit de 7% /an.

Les dépenses de main-d'œuvre de 2006 doivent être calculées à partir d'une dérive de prix qui n'est plus absolue, mais relative : si 500 croissant au taux de 8%

pendant 5 ans font 734,66, cette dernière valeur doit être modifiée pour tenir compte du fait que 1 euro de l'année 2001 est équivalent à  $(1,07^5 =) 1,40$  euro en 2006, ou, ce qui revient au même, que 1 euro en 2006 est égal à  $(1 / 1,4026 = 1,07^{-5} =) 0,7130$  euro en 2001. Les dépenses de main-d'œuvre de 2006 s'élèveront donc à  $734,66 \times 0,7130 = 523,82$  euros constants 2002. Ceci peut encore s'écrire :  $\frac{500 \times 1,08^5}{1,07^5} = 500 \times \frac{1,08^5}{1,07^5} = 500 \times 0,00935^5$ . Tout se passe comme si, au lieu d'affecter les dépenses de main-d'œuvre d'une dérive absolue de 8% / an, on avait utilisé une dérive de prix relatifs de 0,935% / an.

Un calcul analogue pour les dépenses de matières conduit à prévoir, pour ce poste (voir [tableau 10, page 183](#)), une dépense en euros constants de 181,99. Autrement dit, c'est une dérive de prix relatifs de  $-1,869\%$  / an que l'on doit utiliser pour la matière dans le cadre d'un raisonnement en euros constants.

On peut systématiser la recherche du taux de dérive relative  $j$ , à partir du taux d'inflation  $h$  du poste considéré et du taux d'inflation  $i$  de la consommation de référence choisi (appelé encore déflateur) :  $(1 + j) = \frac{1 + h}{1 + i}$ . On en déduit :

$$j = \frac{h - i}{1 + i} \quad \text{relation 21}$$

Pour des taux faibles de  $i$  (disons inférieurs à 10%), ce taux de dérive relative peut raisonnablement s'approximer, pour des calculs sommaires, comme la différence entre le taux d'inflation  $h$  et le taux d'inflation  $i$  (ce qui aurait donné ici 1% au lieu de 0,935% et  $-2\%$  au lieu de  $-1,869\%$ ).

Pour terminer le calcul du bilan actualisé en euros constants, on doit actualiser  $523,81 + 181,99 = 705,80$ , en utilisant un taux d'actualisation exprimé lui aussi en euros constants, c'est-à-dire un taux de :  $\frac{0,1 - 0,07}{1 + 0,07} = 0,02804 = 2,804\%$ , ce

qui donne :  $\overline{x}_{1996} = 705,80 \times 1,02804^{1991 - 1996} = 614,66$

Ce dernier résultat est strictement identique à celui trouvé au § II-2.2.3.1, ce qui, à la réflexion, ne devrait pas étonner car :

$$200 \times \left[ \frac{1,05}{1,10} \right]^5 + 500 \times \left[ \frac{1,08}{1,10} \right]^5 = 200 \times \left[ \frac{1,05/1,07}{1,10/1,07} \right]^5 + 500 \times \left[ \frac{1,05/1,07}{1,10/1,07} \right]^5$$

Certains postes, comme celui des amortissements, restent par définition en euros courants. Le raisonnement en euros constants implique de les corriger de l'incidence de l'inflation avant d'utiliser le taux d'actualisation en euros constants. Par exemple, une économie d'impôt réalisée du fait d'un accroissement d'amortissement, qui s'élèverait à 1000 en 2006 est équivalente à une somme de 713 euros constants aux conditions économiques de 2002 et conduit à une valeur actualisée de  $713 \times 1,02804^{-5} = 620,91$  euros en 2002<sup>1</sup>. *Contrairement à ce que pensent certains praticiens, le raisonnement en euros constants ne dispense pas de faire explicitement une prévision d'inflation sur l'horizon considéré.*

### II-2.2.3.3 Le raisonnement à prix constants

Dans le **raisonnement à prix constants**, les dépenses prévisionnelles de main-d'œuvre et de matières en 2006 sont respectivement de 500 et de 200. Seulement la comparaison directe entre ces 2 grandeurs n'a plus guère de sens et a fortiori leur sommation, car les prix relatifs ont changé, et donc la position d'un certain nombre de problèmes (il suffit pour s'en persuader de réfléchir à l'impact de l'évolution des prix relatifs du KW nucléaire par rapport au KW thermique). En outre, le taux d'intérêt ou le taux d'actualisation à utiliser dans un raisonnement à prix constant est difficile à définir, car l'utilisation de taux exprimés en euros courants intègre implicitement l'inflation, tandis que la définition d'un taux exprimé en euros constants pose le problème du déflateur à retenir, c'est-à-dire de la structure de consommation implicitement considérée en référence; d'une certaine façon, le choix d'un taux exprimé en euros constants n'est pas compatible avec la logique du raisonnement à prix constants.

En définitive, il convient de s'abstenir du raisonnement à prix constants.

## II-3 Les analyses de sensibilité du projet d'investissement

Après avoir présenté le problème méthodologique posé (§ II-3.1), on examinera les analyses de sensibilité en univers certain (§ II-3.2, page 187) puis en univers aléatoire (§ II-3.3, page 190). On verra enfin (§ II-3.4, page 196) comment optimiser certains paramètres d'un projet d'investissement dont certaines caractéristiques sont définies en probabilité.

Table des  
matières

### II-3.1 Présentation du problème

L'analyse d'un dossier d'investissement s'appuie sur:

- des données techniques (caractéristiques physiques des équipements que l'on envisage d'acheter, de supprimer ou de réaffecter, des anciennes et nouvelles gammes de fabrication, etc.);
- une analyse différentielle des flux affectés par la transformation envisagée des processus, se traduisant par des échéanciers de variation de consommation de composants et de matières premières, de productions et de ventes;
- des informations de coûts et, éventuellement, de prix permettant une valorisation des données physiques du dossier.

Index  
thématique

La synthèse économique de ces informations s'effectue classiquement sur une feuille de calcul d'un tableur. On est alors en présence d'une modélisation simplifiée de la réalité dans laquelle les hypothèses retenues se traduisent par des valeurs assignées à des cellules de la feuille de calcul (paramètres) et par des mécanismes de calcul en chaîne aboutissant aux indicateurs retenus pour éclairer la prise de décision, principalement le Flux Net de Trésorerie Actualisé (FNTA) et le Taux de Rentabilité Interne (TRI), qui sont définis comme valeurs calculées dans des cellules de la feuille de calcul (résultats). Cette modélisation, plus ou moins sophistiquée, s'appuie sur d'autres études, en particulier sur des simulations de la transformation de processus productifs<sup>1</sup> dont elle recueille des informations agré-

1. On peut également considérer que l'on est dans un cas de dérive de coût nulle sur ce poste ( $h = 0\%$ ), ce qui

donne:  $1000 \times \left[ \frac{1,00/1,07}{1,10/1,07} \right]^5$ .

gées (taux moyen d'occupation de certaines ressources, par exemple) et certaines hypothèses de travail. On supposera ici que ce travail préalable est pertinent<sup>1</sup>, mais que se pose un problème de précision quant à la connaissance que l'on a de certains paramètres, ce qui conditionne la crédibilité des valeurs calculées pour les indicateurs. La décision finale implique alors une *prise de risque* que le décideur souhaite apprécier. Cet éclairage est obtenu par une **analyse de sensibilité**. Pour faire comprendre la démarche suivie et l'intérêt de nouveaux outils apparus au début des années quatre-vingt-dix, il est préférable de s'appuyer sur un exemple.

L'entreprise **MÉCANOR** étudie les conséquences économiques du lancement d'un produit en fin de conception, dont le cycle de vie se caractérise par une date de retrait prévisionnelle imposée (fin 2004) en raison d'une obsolescence technologique et commerciale rapide imputable à un environnement fortement concurrentiel. Le modèle retenu ici (voir la feuille de calcul de la [figure 44, page 187](#)) est simplifié à l'extrême pour éviter de compliquer un exemple se voulant plus illustratif d'une analyse de sensibilité, que d'une modélisation. Dans cet exemple, un équipement nouveau serait en service au 1er mars 2001, pour un investissement ponctuellement arrêté au 31 décembre 2000; le coût unitaire prévisionnel est de 300 dollars liduriens (avec des hypothèses de décroissance de ce coût les années suivantes, portées sur la ligne du dessus); le marché potentiel est supposé croître puis décroître et le prix de vente est supposé baisser d'année en année. Les informations recueillies permettent de déterminer que l'opération a un taux de rentabilité interne de 14,07 % et que le FNTA à 5 % s'élève à 1 099 269 dollars liduriens.

À partir de ce référentiel, on peut amorcer une étude de sensibilité des indicateurs économiques retenus sur la base de variantes de valeurs prises par un ou plusieurs paramètres. Ce jeu du « que se passe-t-il si ? »<sup>2</sup> est fort instructif et peut conduire, dans l'allocation des ressources financières de l'entreprise, à une modification du classement de l'intérêt économique des projets étudiés, observation qui incite à relativiser l'approche financière « classique » de ces problèmes de choix d'investissement. Par exemple, dans notre exemple, un retard de 3 mois sur la commercialisation du nouveau produit se traduit par une perte de 4 points du taux de rentabilité interne du projet et par une baisse de 43 % de son FNTA à 5 %. Cette analyse comparative permet de définir des équivalences entre composantes du projet: par exemple, il est équivalent, du point de vue de la baisse de FNTA, de

1. *Note de la page précédente.* Ces études se fondent sur des approches en univers certain s'appuyant sur des cartographies de flux ou de processus (voir § I-2.3, page 160). Pour des projets transformant fortement un système productif, il est souhaitable de procéder à des simulations en univers aléatoire, pour compléter la réflexion sur la pertinence de règles de gestion actuelles ou nouvelles au regard de préoccupations de performance économique, de flexibilité et de réactivité (voir § I-2.1, page 148); de nombreux logiciels, ergonomiques et financièrement abordables, sont maintenant disponibles sur micro-ordinateurs.

1. Celle-ci porte sur de nombreux critères: le niveau de détail retenu dans la description des processus, des ressources et des flux doit être suffisamment homogène et compatible avec le niveau d'information disponible, les mécanismes de valorisation retenus (dissociation entre charges fixes et charges variables, détermination des coûts standards, etc.) doivent limiter au maximum les distorsions qu'ils induisent dans une évaluation économique par un bilan différentiel, etc. Enfin, en cas de dossier d'investissement relatif au développement et à la production de produits nouveaux, il est judicieux (ce que l'on ne fait pas dans l'exemple sommaire présenté ici) d'expliciter les ventes prévisionnelles en partant d'un échéancier prévisionnel du marché global de la gamme de produits considérée et d'un échéancier de la part prise sur ce marché (voir Smith & Reinertsen, 1998, [390], chap. II). Il est évident que la pertinence d'un modèle s'apprécie au cas par cas. Dans ce paragraphe, la réflexion porte sur la qualité des informations qui nourrissent le modèle et non sur le modèle lui-même.

2. Les Anglo-Saxons parlent de *what-if analysis*.

**FIGURE 44**  
*Données initiales du dossier d'investissement de MECANOR*

	A	B	C	D	E	F
1	Année	2000	2001	2002	2003	2004
2	Coef de décroissance du coût			0,9	0,85	0,85
3	Coût unitaire		300,00	270,00	229,50	195,08
4	Prix de vente		500,00	500,00	450,00	400,00
5	Marge unitaire		200,00	230,00	220,50	204,93
6	Nb mois d'exploitation en 2001	10				
7	Coefficient de variation du marché			1,25	0,7	0,5
8	Marché année pleine		10 000	12 500	8 750	4 375
9	Investis. + études (au 31/12/01)	5 500 000				
10	Année	2000	2001	2002	2003	2004
11	FNT (au 31/12/année)	-5 500 000	1 666 667	2 875 000	1 929 375	896 547
12	Taux d'actualisation	5%	10%	15%	20%	
13	FNTA	1 099 269	453 106	-95 613	-565 684	
14	TRI	14,07%				

retarder de 3 mois l'introduction du produit ou d'augmenter de 476000 le montant des investissements et frais d'étude (l'équivalence en termes de baisse de TRI étant une augmentation de 453000). Dans cet exemple, on dispose d'informations permettant d'estimer la dépense maximale à consentir pour éviter de retarder de 3 mois l'introduction du produit nouveau. L'avantage du tableur est de permettre immédiatement des réponses à ce type d'interrogation à condition, bien sûr, d'avoir préalablement isolé dans des cellules, les paramètres que l'on souhaite faire varier.

Table des matières

Index thématique

### II-3.2 Systématisation de l'analyse de sensibilité en univers certain

Dans notre exemple, on a seulement 14 paramètres, alors que des problèmes réels peuvent faire intervenir des dizaines, voire des centaines de paramètres. Il est évident que, dans ce cas, l'exploration de tous les scénarios de variations possibles de chaque paramètre est une opération longue et fastidieuse. Un add-in d'Excel, *TopRank*<sup>1</sup>, permet d'automatiser ce travail en effectuant mécaniquement ce travail et en classant, pour chaque indicateur retenu, les paramètres par ordre d'incidence décroissante. Avec cette extension des fonctionnalités du tableur, il est possible de décider que tous les paramètres de la feuille de calcul (ou des feuilles de calcul enchaînées) varient, sauf spécifications contraires<sup>2</sup>, de  $-k_1\%$  à  $+k_2\%$ , avec la possibilité de définir, par interpolation, un nombre prédéterminé de valeurs intermédiaires. Dans notre exemple, pour une variation possible de  $\pm 10\%$  de chacun des 14 paramètres, les 13 autres restant stables, on obtient un classement pour

1. *Top Rank* est add-in d'Excel ou de Lotus 1-2-3, c'est-à-dire un complément de ce tableur qui en accroît les fonctionnalités. Il est édité par Palisade (<http://www.palisade.com> d'où peuvent être téléchargées des versions complètes d'évaluation, utilisables sur quelques semaines), tout comme trois autres *adds-in* que nous évoquons, *@Risk*, *Evolver* et *Risk Optimizer*.

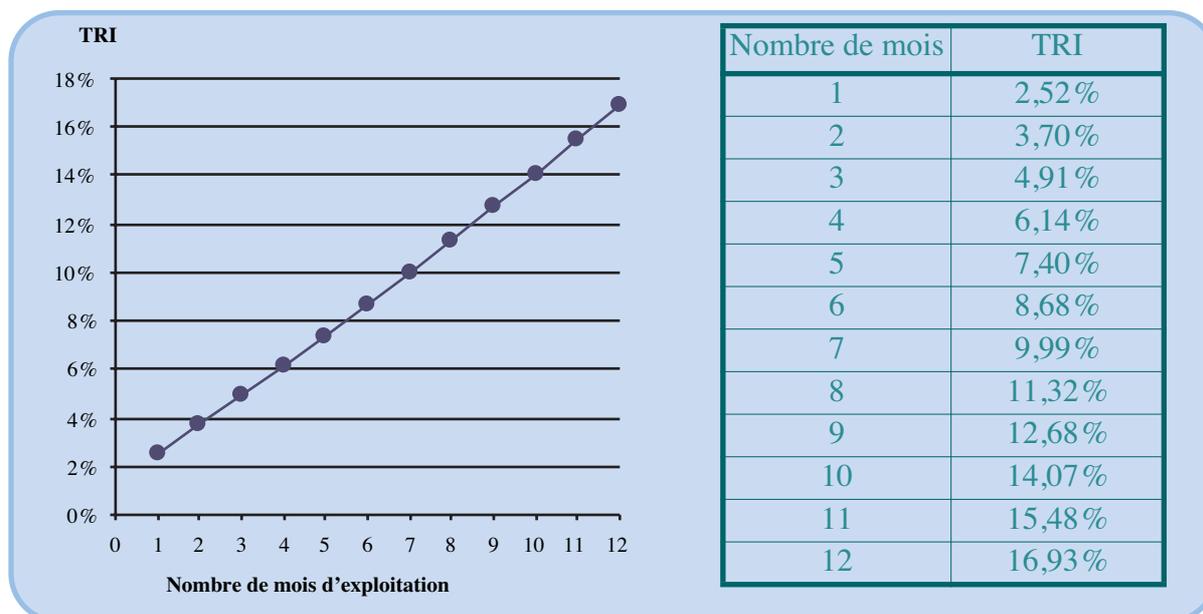
2. En particulier, définition par des écarts algébriques maximaux ou par des listes finies de valeurs; par ailleurs, il est possible d'effectuer autant d'analyses de sensibilité différentes qu'il y a de valeurs possibles retenues pour un paramètre donné (par exemple, le taux d'actualisation), ce qui permet de tester la stabilité des classements en fonction des valeurs de ce paramètre sous contrôle.

chaque cellule cible retenue (TRI et FNTA à 5%) dans lesquels les cinq facteurs les plus sensibles sont les mêmes. Trois graphiques sont utilisables :

- Le **graphique «en tornade»** (voir figure 45) représente un classement de l'incidence des variations extrêmes envisagées pour chaque paramètre sur la variation de cet indicateur, en offrant une visualisation du classement des facteurs par importance décroissante de leurs impacts sur l'indicateur ainsi que l'importance relative et le sens de ces impacts.
- Le graphique «classique» liant l'indicateur étudié à un seul paramètre peut être obtenu (figure 46).

FIGURE 46

*Analyse de sensibilité par rapport à un paramètre*



- Enfin, le **graphique «en toile d'araignée»** (figure 47, page 190) est habituellement établi sur le sous-ensemble des paramètres les plus influents, offre une représentation alternative intéressante au graphique en tornade lorsque l'on désire visualiser simultanément l'incidence d'un ensemble de valeurs prises par chaque paramètre, en ne prenant pas en compte seulement les valeurs extrêmes des paramètres étudiés (ce que l'on faisait déjà dans le graphique précédent) et que l'incidence des paramètres sur l'indicateur retenu n'est pas linéaire<sup>1</sup>).

Il est possible d'étendre cette analyse de sensibilité à un groupe de  $k$  paramètres, pris parmi les  $n$  introduits, qui interviennent dans la détermination de la valeur d'un indicateur. Dans ce cas, le problème exploratoire peut s'avérer redoutable : à supposer que l'on retienne 4 valeurs possibles pour chaque paramètre, et que l'on retienne  $k = 3$ , l'analyse d'un jeu de 3 paramètres conduit à explorer  $4^3 = 64$  groupes de valeurs différentes pour ce jeu de 3 paramètres ; sachant qu'il existe  $14!/(11! \times 3!) = 364$  combinaisons de 3 paramètres pris parmi 14, il devient nécessaire d'explorer  $64 \times 364 = 23\,296$  possibilités pour trouver les

1. Lorsque ce type de graphique est généré automatiquement, l'usage de la couleur permet de repérer les courbes associées aux différents paramètres ; en l'absence de couleur, il est nécessaire de procéder à un classement des intitulés dans la légende pour permettre ce repérage car la variété des conventions de traits discontinus n'est pas suffisante pour permettre un repérage clair de plus de 5 paramètres.

FIGURE 45

Analyse de sensibilité du TRI et du FNTA à 5% par un graphique « en tornade »

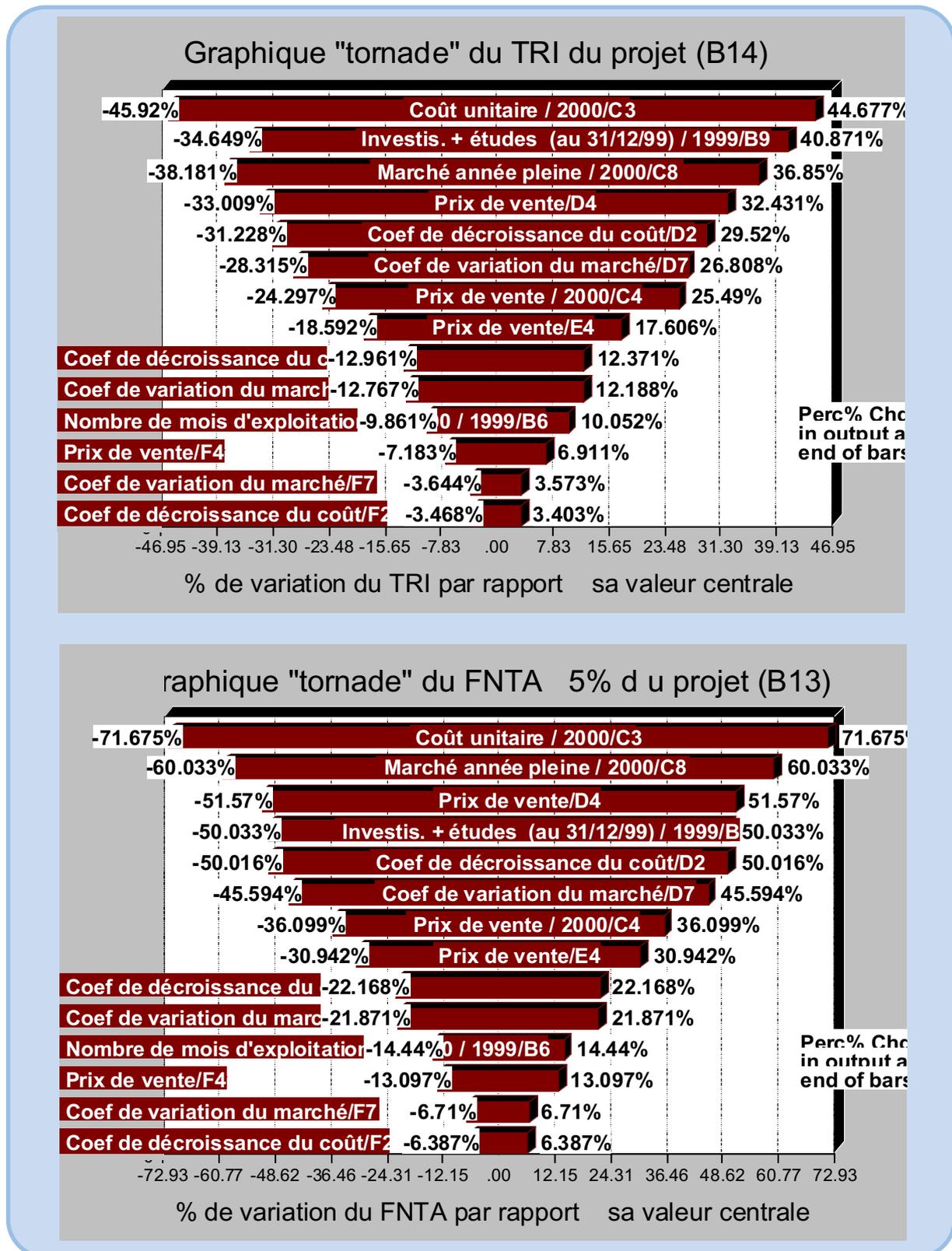


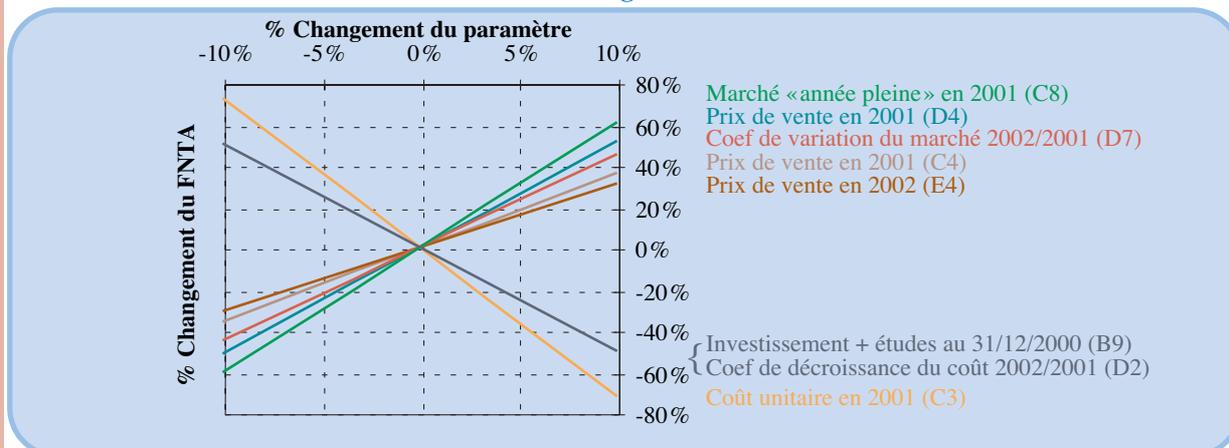
Table des matières

Index thématique

paramètres qui jouent le plus sur l'indicateur retenu. Un travail « manuel » est alors hors de question et, même avec un ordinateur, on entrevoit rapidement les limites de la démarche. Cette recherche automatique est effectuée par TopRank, malheureusement actuellement seulement sous environnement de tableur américain en

FIGURE 47

Représentation de l'analyse de sensibilité du FNTA par un graphique « en toile d'araignée »



raison de problèmes posés par la mauvaise « localisation » (= version internationale) de cet *add-in*.

Cela étant, ce type d'analyse de sensibilité de l'incidence de la variation simultanée de plusieurs paramètres ne doit pas être poussé trop loin pour deux raisons. Tout d'abord, il privilégie l'impact de combinaisons de valeurs extrêmes, qui ont une probabilité faible d'occurrence. Ensuite, et surtout, il ne permet pas d'exploiter le degré de connaissance du problème posé, qu'ont les différents acteurs participant à l'instruction du dossier. Pour aller plus loin, il convient de procéder à une analyse de sensibilité en univers aléatoire.

### II-3.3 Analyse de sensibilité en univers aléatoire

L'utilisation de l'approche simulateur dans l'instruction d'un dossier d'investissement remonte aux années soixante<sup>1</sup>. Elle repose sur l'exploitation des informations plus ou moins subjectives possédées par les acteurs à l'origine des informations quantitatives exploitées dans le dossier d'investissement, sur la variabilité des paramètres utilisés, pour fournir des indications sur la variabilité des indicateurs utilisés dans la prise de décision. Dans cette optique, on est plus en présence d'une technique d'agrégation cohérente d'opinions que d'une approche objective d'obtention de la distribution de probabilité d'indicateurs, mais cette consolidation d'avis constitue un outil collectif rationnel d'analyse des risques encourus, tels qu'ils sont collectivement perçus. Accessoirement, cette approche, en permettant une focalisation sur la réduction de la variabilité, constitue un instrument de pilotage des comportements collectifs.

On supposera maintenant que le produit étudié se décompose en trois sous-ensembles et que les informations relatives au coût de chacun d'entre eux soient

1. Des propositions d'exploitation de la démarche simulateur pour résoudre des problèmes de gestion se trouvent dans la littérature dès le début des années soixante. En matière d'investissement, un article célèbre de Hertz (1968, [230]) rejette la pratique des scénarios fondée sur des combinaisons d'hypothèses haute, basse et moyenne, pour proposer une démarche simulateur. Cette argumentation est illustrée numériquement dans notre ouvrage (Giard, 1995, [182], p. 114 - 123); on y trouve également une introduction aux techniques de simulation et un exemple d'utilisation de ces techniques avec @Risk, sur le problème de l'estimation de coûts de fabrication d'un produit nouveau (repris ici). Le lecteur désireux d'approfondir ce type d'approche et d'avoir un panorama des logiciels disponibles dans ce domaine est invité à se reporter à l'ouvrage de Vose (2000, [434]); d'autres logiciels similaires sont disponibles, parmi lesquels Crystal Ball est l'un des plus connus ([www.decisioneering.com](http://www.decisioneering.com)).

décrites par des distributions triangulaires<sup>1</sup> dont les paramètres sont donnés dans le [tableau 12, page 191](#). Pour les autres paramètres, les distributions retenues sont décrites dans le [tableau 13](#), les prix de vente étant supposés fixés a priori<sup>2</sup>.

TABLEAU 12  
*Informations relatives aux estimations de coût des trois composants du produit (distribution triangulaire postulée)*

	A	B	C
Coût minimum	129	91	52
Coût modal	140	100	60
Coût maximum	172	127	65

TABLEAU 13  
*Informations relatives aux estimations des autres paramètres du modèle*

Cellule	Paramètre	
D2	Coefficient de variation du coût (2001 / 2000)	Loi uniforme (bornes: 0,85 et 0,95)
E2	Coefficient de variation du coût (2002 / 2001)	Loi uniforme (bornes: 0,8 et 0,9)
F2	Coefficient de variation du coût (2003 / 2002)	Loi uniforme (bornes: 0,8 et 0,9)
B6	Nombre de mois d'exploitation en 2000	Loi Bêta Pert (Min: 1; Mode: 10; Max: 12)
D7	Coefficient de variation du marché (2001 / 2000)	Loi triangulaire (Min: 1,1; Mode: 1,25; Max: 1,5)
E7	Coefficient de variation du marché (2002 / 2001)	Loi uniforme (bornes: 0,5 et 0,9)
F7	Coefficient de variation du marché (2003 / 2002)	Loi uniforme (bornes: 0,4 et 0,6)
B8	Marché 2000 en année pleine	Loi uniforme (bornes: 8000 et 12000)
B9	Investissement + études (au 31/12/99)	Loi triangulaire (Min: 5300000; Mode: 5500000; Max: 6000000)

Table des matières

Index thématique

On obtient alors la nouvelle feuille de calcul décrite dans la [figure 48, page 192](#), où les valeurs utilisées sont les espérances mathématiques des distributions retenues. On s'intéressera, là encore, à une analyse de sensibilité du TRI et du FNTA à 5%. L'application de la démarche simulatoire au problème posé, en partant de 1000 jeux de données générés aléatoirement, conduit (voir [tableau 14, page 194](#), et [figure 49, page 193](#)) à un TRI moyen de 15,21%, avec une forte dispersion autour de cette valeur (écart-type du TRI: 10,16%) et une probabilité d'obtenir un taux de rentabilité interne négatif de l'ordre de 5,3% et une probabilité de plus de 30% que ce TRI soit inférieur à 10%, ce qui relativise l'information favorable donnée par la moyenne<sup>3</sup> (et relativise l'objectivité d'une sélection de projets d'investissement basée sur un strict raisonnement en univers certain).

1. Voir Giard (2003, [182]), p. 157, pour une description sommaire de cette distribution. On notera que la somme des modes des trois distributions donne le coût unitaire de 300, utilisé auparavant. La somme des espérances mathématiques égale au tiers de la somme du minimum, du mode et du maximum, soit  $147 + 106 + 59$  conduit à une valeur différente (312, que l'on retrouve dans la copie d'écran de la [figure 48, page 192](#)), mais on a privilégié ici l'hypothèse le plus souvent vérifiée selon laquelle l'information fournie spontanément pour une « valeur centrale » d'une distribution est son mode, valeur considérée comme la plus probable.

2. Pour les distributions « Triangulaire » et « Bêta PERT », le mode utilisé correspond à la valeur retenue en univers certain; pour les distributions uniformes, c'est la moyenne des bornes qui correspond à la valeur retenue en univers certain. Voir également le [chapitre IV, § III-3.2, page 327](#).

FIGURE 48

*Données initiales (en espérance mathématique) du dossier d'investissement de MECANOR*

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Année</b>	<b>2000</b>	<b>2001</b>	<b>2002</b>	<b>2003</b>	<b>2004</b>
2	Coef de décroissance du coût			0,9	0,85	0,85
3	Coût unitaire		312,00	280,80	238,68	202,88
4	Prix de vente		500,00	500,00	450,00	400,00
5	Marge unitaire		188,00	219,20	211,32	197,12
6	Nb mois d'exploitation en 2001		8,83			
7	Coefficients de variation du marché			1,25	,700	,500
8	Marché année pleine		10 000	12500	8750	4375
9	<b>Année</b>		<b>2001</b>	<b>2002</b>	<b>2003</b>	<b>2004</b>
10	Marge totale		1 383 889	2 740 000	1 849 050	862 409
11	Investis. + études (au 31/12/00)	5 600 000				
12	<b>Année</b>	<b>2000</b>	<b>2001</b>	<b>2002</b>	<b>2003</b>	<b>2004</b>
13	FNT (au 31/12/année)	-5 600 000	1 383 889	2 740 000	1 849 050	862 409
14	Taux d'actualisation	5%				
15	FNTA au 31/12/00	510 035				
16	TRI	9,13%				

À partir du moment où l'on dispose d'un ensemble de données obtenues par simulation (1000 jeux de données, dans notre exemple), il est tentant de pousser l'analyse pour chercher à identifier quelques caractéristiques fortes dans ces futurs considérés comme équiprobables. Plusieurs pistes peuvent être suivies :

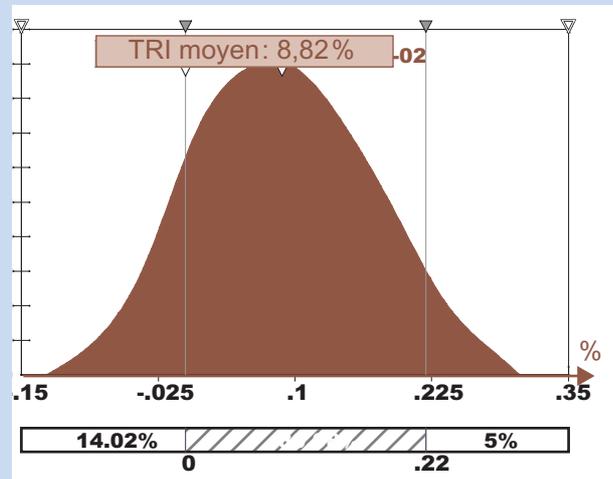
- Dans la mesure où le modèle utilisé comporte des échéanciers, il peut être intéressant d'examiner simultanément la dispersion des valeurs prises par chacun des flux dans la simulation. La synthèse la plus parlante est de type graphique, puisque l'on est en présence d'un phénomène faisant classiquement l'objet d'une représentation dans un graphique où l'axe des abscisses est celui du temps et celui des ordonnées permet de repérer les valeurs des flux. Il est alors possible de construire autour de la courbe d'évolution des valeurs moyennes calculées dans la simulation, un jeu de deux courbes encadrantes correspondant à un intervalle. Plusieurs solutions sont alors envisageables. Si la simulation comporte un nombre suffisant de jeux de données, ce qui est le cas ici, on peut utiliser des fractiles observés dans la simulation en retenant ceux qui sont symétriques par rapport à la médiane, pour définir, par exemple un intervalle à 95 % ou à 50 %, ce qu'illustre la [figure 50 de la page 194](#), pour les flux nets de trésorerie des années 2000 à 2003. Une autre solution consiste à construire les courbes encadrantes en ajoutant  $\pm k_1 \times$  écart-type ou  $\pm k_2 \times$  écart-type aux valeurs centrales, avec, par exemple,  $k_1 = 1$  et  $k_2 = 2$ .

3. Une analyse similaire sur le FNTA à 5% conduit à une valeur moyenne de 144500, avec dispersion très forte autour de cette valeur (135000) et une probabilité de 15,5% d'avoir un FNTA négatif, et donc un taux de rentabilité interne inférieur à 5%.

FIGURE 49

Distribution du Taux de Rentabilité Interne du projet et de son FNTA à 5 %

Distribution de probabilités du TRI (B16)



Distribution de probabilités du FNTA (B15)

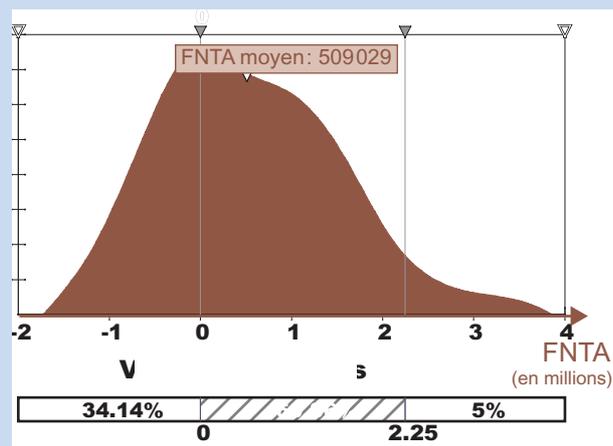


Table des matières

Index thématique

- À partir de l'ensemble des résultats de ces simulations, on peut vouloir obtenir des indications sur les facteurs que l'on peut considérer comme les plus influents sur la variabilité des indicateurs retenus. Comme en univers certain, on peut soit envisager une approche traitant de manière isolée l'impact de la variabilité de chaque paramètre intervenant dans la détermination d'un indicateur, sur la variabilité de ce dernier et chercher à les classer par ordre d'influence décroissante, soit chercher à trouver des combinaisons de paramètres qui semblent jouer de manière prépondérante sur la variabilité de l'indicateur étudié. *Cette partie, plus technique, peut être sautée par le lecteur non scientifique.*
  - L'étude de sensibilité de chaque paramètre peut être menée de plusieurs façons. L'add-in @Risk en propose deux qui s'appuient sur des démarches assez classiques en matière de recherche de causalité (voir les résultats dans les copies d'écran de la [figure 51, page 196](#)). La première consiste à calculer les coefficients de corrélation de rangs<sup>1</sup> entre l'indicateur étudié et chaque paramètre défini en probabilité. Cette solution présente l'avant-

FIGURE 50  
Variabilité des flux de trésorerie

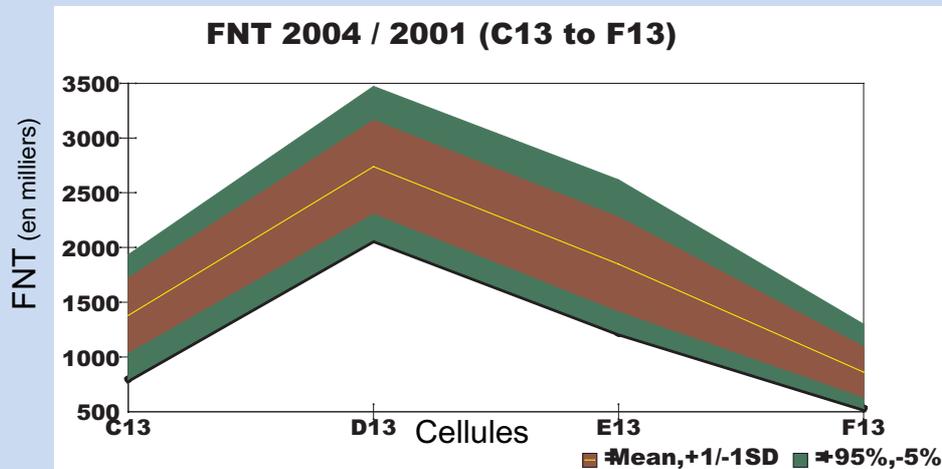


TABLEAU 14  
Estimation des fonctions de répartition du FNTA à 5%, du TRI et du coût de production unitaire

	FNTA à 5%	TRI	Coût du Produit
Moyenne	5090230	8,8%	312,0
Écart-type	1013064	8,0%	12,2
Minimum	-1846945	-11,5%	283,5
Fractile à 5%	-1025527	-3,8%	293,3
Fractile à 10%	-751011	-1,5%	296,1
Fractile à 15%	-555876	0,4%	298,6
Fractile à 20%	-382418	1,6%	300,8
Fractile à 25%	-246492	2,9%	303,2
Fractile à 30%	-110386	4,0%	305,2
Fractile à 35%	14034	5,1%	306,9
Fractile à 40%	155577	6,3%	308,2
Fractile à 45%	298296	7,5%	309,8
Fractile à 50%	434837	8,6%	311,5
Fractile à 55%	593551	9,8%	313,3
Fractile à 60%	739433	11,0%	315,0
Fractile à 65%	866479	12,0%	316,7
Fractile à 70%	1005544	13,1%	318,3
Fractile à 75%	1181220	14,3%	320,1
Fractile à 80%	1407062	15,9%	321,8
Fractile à 85%	1630657	17,6%	324,4
Fractile à 90%	1821830	19,1%	327,4
Fractile à 95%	509029,6	8,8%	312,0
Maximum	1013064	8,0%	12,2

Table des matières

Index thématique

1. Il s'agit, rappelons-le, d'un coefficient de corrélation entre deux variables calculées en remplaçant chaque valeur prise par une variable par son rang dans l'ensemble des valeurs prises par cette variable dans l'ensemble étudié (voir plus de détail, voir Giard (2003, [182]), p. 266).

tage de ne reposer sur aucune hypothèse de relation linéaire entre l'indicateur étudié et le paramètre retenu. La seconde démarche repose implicitement sur cette hypothèse et doit donc être utilisée avec prudence. Elle consiste à effectuer une régression linéaire multiple sur les données de la simulation, en remplaçant la variable expliquée (l'indicateur étudié) et les variables explicatives (les paramètres définis en probabilité) par les valeurs centrées réduites correspondantes, afin de faciliter l'analyse des coefficients de régression : dans notre exemple, le coefficient associé au paramètre « marché en année pleine en 2001 » est de 0,696 ; cela signifie qu'un accroissement de 1 écart-type sur ce paramètre se traduit par un accroissement de 0,696 écart-type du TRI. Le classement des coefficients de régression par valeurs absolues décroissantes peut alors être considéré comme une mesure correcte de l'influence finale de la variabilité relative des paramètres retenus, à condition de considérer l'hypothèse de linéarité comme acceptable, en première grandeur (ce qui implique un coefficient de détermination multiple estimé suffisamment élevé ; dans notre exemple, ce coefficient est de 0,996 ce qui rend cette approche tout à fait acceptable). Un dernier problème méthodologique doit être réglé, celui de la sélection des seuls paramètres considérés comme significatifs dans cette régression ; la démarche classique de la régression en *stepwise* peut être utilisée<sup>1</sup>. On peut noter ici la grande concordance de résultats entre ces deux approches. On peut remarquer aussi que l'on ne retrouve pas, comme en univers certain, le coût de fabrication comme premier facteur, ce qui s'explique bien en remarquant que la variation arbitraire de  $\pm 10\%$  retenue en univers certain pour ce paramètre correspond à 2,5 écart-type des valeurs obtenues en univers aléatoire, ce qui fait que la situation décrite en univers certain doit être considérée comme très peu vraisemblable.

- L'étude simultanée de plusieurs paramètres pose des problèmes méthodologiques plus complexes. L'approche retenue par @Risk est une approche non-paramétrique qui consiste à travailler sur le sous-ensemble des simulations ayant conduit aux plus fortes (ou aux plus faibles) valeurs de l'indicateur, par exemple les 25 % des valeurs les plus fortes (ou les plus faibles), et à rechercher si les valeurs prises dans ce sous-ensemble, pour les paramètres définis en probabilité, diffèrent de celles observées dans l'ensemble des simulations. Pour éviter de fonder les conclusions sur des hypothèses restrictives, la solution retenue consiste à comparer, pour chaque paramètre, la médiane observée dans le sous-ensemble retenu, avec celle observée sur l'ensemble des simulations et à ne retenir que les paramètres considérés comme significativement différents<sup>2</sup>. Dans notre exemple, dans l'échantillon possédant les 25 % plus fortes valeurs du FNTA à 5 %, tout comme dans celui possédant les 25 % plus faibles valeurs

1. La technique de régression multiple optimale, théoriquement préférable, est plus compliquée à mettre en œuvre et les résultats optimaux retenus ne diffèrent généralement pas de ceux trouvés avec la méthode du *stepwise* plus facile à utiliser (c'est du reste la solution retenue par @Risk).

2. On note  $M_{e_{i_0}}$  et  $\sigma_{i_0}$  la médiane et l'écart-type du paramètre  $i$  dans l'ensemble des simulations et  $M_{e_{i_1}}$  la médiane du paramètre  $i$  dans le sous-ensemble de simulations ; ce paramètre est considéré comme significatif seulement si  $|M_{e_{i_0}} - M_{e_{i_1}}| / \sigma_{i_0} > 0,5$ .

FIGURE 51

Analyse de sensibilité du TRI par coefficients de corrélation de rang et par coefficients de régression (stepwise) sur variables centrées-réduites

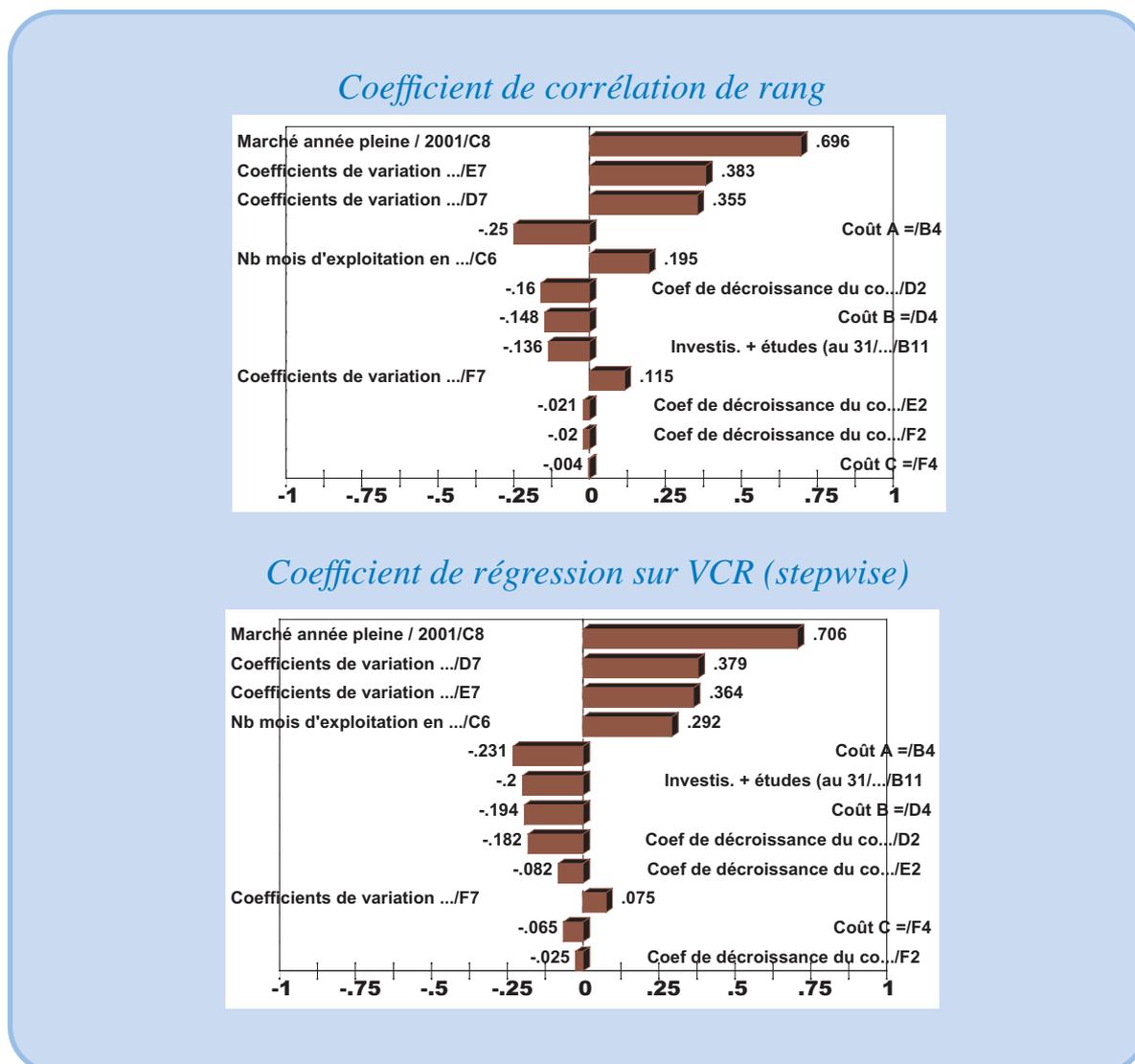


Table des matières

Index thématique

du FNTA à 5 %, on retrouve le même groupe de trois paramètres : le coefficient de décroissance du coût 2003 / 2002 (cellule F2), marché « année pleine » (cellule C8) et investissement et études (cellule B9); s'y ajoute, pour le premier échantillon, le coefficient de variation du marché 2002 / 2001 (cellule E7).

### II-3.4 Optimisation de certains paramètres en univers aléatoire

Les progrès réalisés en matière d'optimisation depuis une vingtaine d'années ont permis d'intégrer aux tableurs, sous forme d'*add-in*, des algorithmes génétiques<sup>1</sup> permettant de résoudre des problèmes d'optimisation d'une certaine complexité aussi bien en univers certain<sup>2</sup> qu'en univers aléatoire<sup>3</sup>. C'est dans ce dernier cas que nous nous situons ici.

1. Voir § I-3.3.2, page 408 du chapitre I-3.3.2.

2. Par exemple, l'*add-in Evolver*<sup>®</sup> de Palisade utilisable dans Excel© (www.palisade.com d'où peuvent être téléchargées des versions complètes d'évaluation, utilisables sur quelques semaines).

FIGURE 52

Analyse de sensibilité du FNTA à 5% par coefficients de corrélation de rang et par coefficients de régression (stepwise) sur variables centrées-réduites

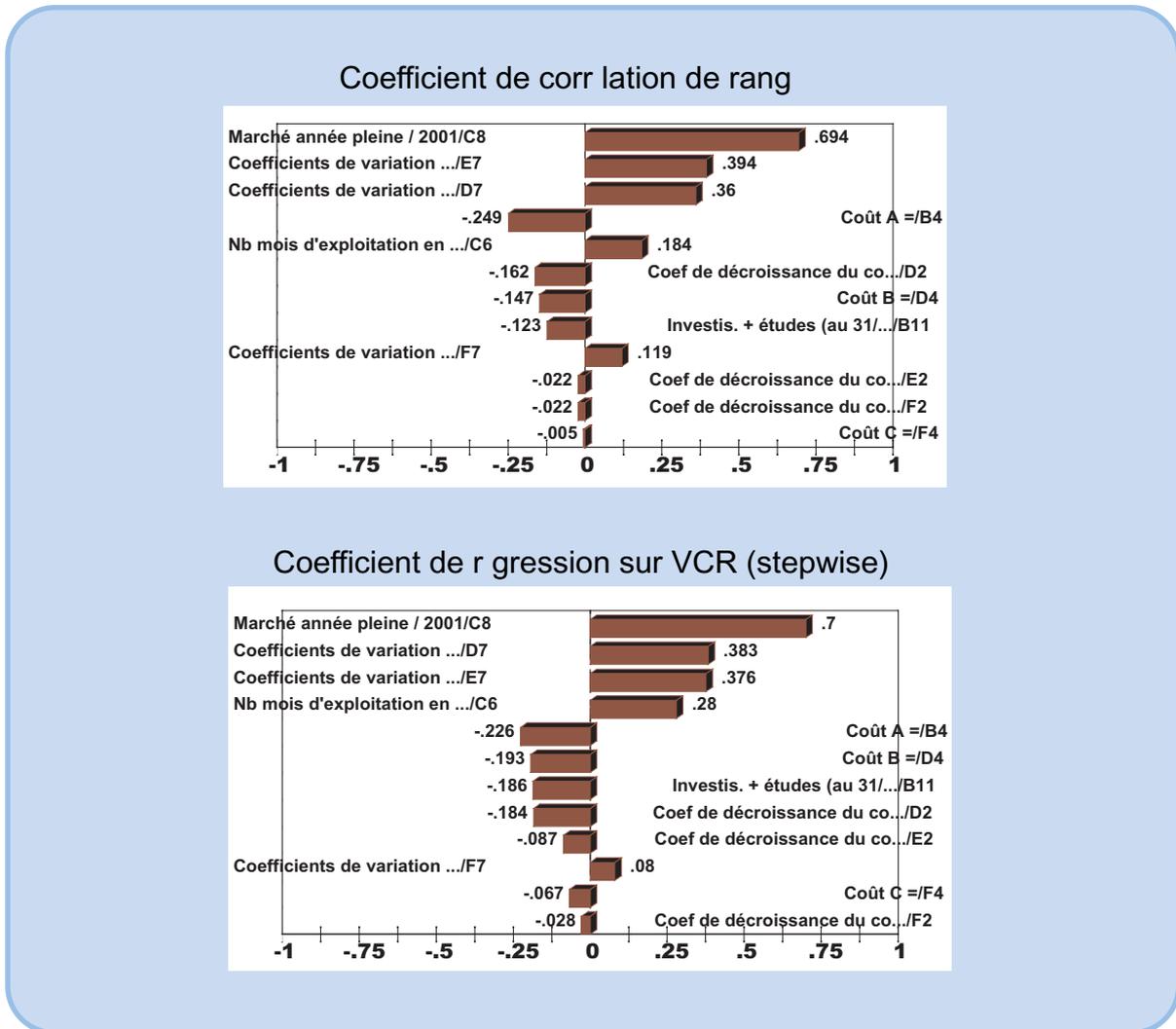


Table des matières

Index thématique

Modifions notre exemple en introduisant tout d'abord deux filières technologiques. La première correspond à une filière nouvelle devant conduire à des coûts de production unitaires plus faibles, mais les incertitudes se traduisent par une assez grande dispersion du coût unitaire prévisionnel; les données de cette hypothèse correspondent à celles utilisées dans l'exemple du § II-3.3. La seconde filière est bien maîtrisée et se caractérise par un niveau moyen de coûts plus élevé et une dispersion plus faible.

Par ailleurs, la capacité à installer devient maintenant une variable de commande. On suppose ici que la capacité minimale installée est de 5000 et que chaque unité de production autorise une production annuelle de 1000, le coût de cette unité supplémentaire étant respectivement de 300000 dollars liduriens pour la filière 1000 et 280000 dollars pour la filière 2. En outre, il faut y ajouter les dépenses d'étude (régies par une distribution triangulaire). La demande satisfaite

3. Note de la page précédente. C'est le cas de l'add-in Risk Optimizer® de Palisade, utilisable sous Excel®, en complément de @Risk (autre add-in de Palisade). L'exemple proposé ici s'appuie sur cet add-in.

TABLEAU 15

Informations relatives aux estimations de coût des trois composants du produit (distribution triangulaire postulée) dans le cas de la seconde filière

	A	B	C
Coût minimum	145	103	60
Coût modal	147	110	63
Coût maximum	151	115	66

au cours d'une année est limitée par la capacité installée<sup>1</sup>. Le problème posé ici est donc celui de la détermination simultanée de la filière et de la capacité à installer. Ce problème est très simplifié, mais il donne une idée du champ d'application de cette approche.

Comme dans tout problème d'optimisation, on retrouve une fonction à optimiser, qui correspond ici à une cellule calculée, des variables de commande et des contraintes.

- Les variables de commande du problème correspondent à des cellules dans lesquelles se trouvent des paramètres numériques qui influencent la valeur de la cellule à optimiser. Chaque variable de commande  $x$  est définie comme étant de type entier ou réel. Le domaine des valeurs qu'elle peut prendre est restreint par une double inégalité du type  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Ces variables de commande peuvent être des variables binaires (voir [chapitre XVI, page 1135](#)) et peuvent interagir librement entre elles<sup>2</sup>.
- Les contraintes du problème correspondent à des cellules dans lesquelles figurent des résultats induits par les paramètres numériques. Résultant d'une cascade de calculs, elles ne sont pas nécessairement linéaires. Ces contraintes peuvent de deux types :
  - la contrainte porte sur la valeur calculée pour une cellule au cours de l'une quelconque des simulations et son non-respect provoque immédiatement l'abandon du jeu de valeurs prises par les variables de commande ;
  - la contrainte porte sur un paramètre de tendance centrale ou de dispersion établi pour une cellule sur l'ensemble des valeurs calculées au cours des simulations faites avec un même jeu de variables de commande et son non-respect provoque l'abandon de ce jeu de valeurs.

Ces deux types de contraintes peuvent peser sur une même cellule calculée. Il peut s'agir de celle de la fonction-objectif : c'est ainsi que l'on peut chercher à maximiser le taux de rentabilité interne du projet en interdisant tout jeu de valeurs des variables de commande qui conduise une fois à obtenir un TRI négatif et qui conduise à un écart-type de la distribution d'échantillonnage des TRI inférieur à 0,04.

1. Ce qui suppose que la demande soit assez prévisible pour que des ajustements « charge - capacité » puisse s'opérer par la constitution de stock. Dans le cas d'une demande fortement aléatoire sur courte période et ne pouvant être différée, il faut modifier le modèle en s'appuyant sur un découpage temporel plus fin ou en faisant appel aux résultats d'un simulateur couplé avec le tableur (selon un mécanisme assez classique de nos jours).

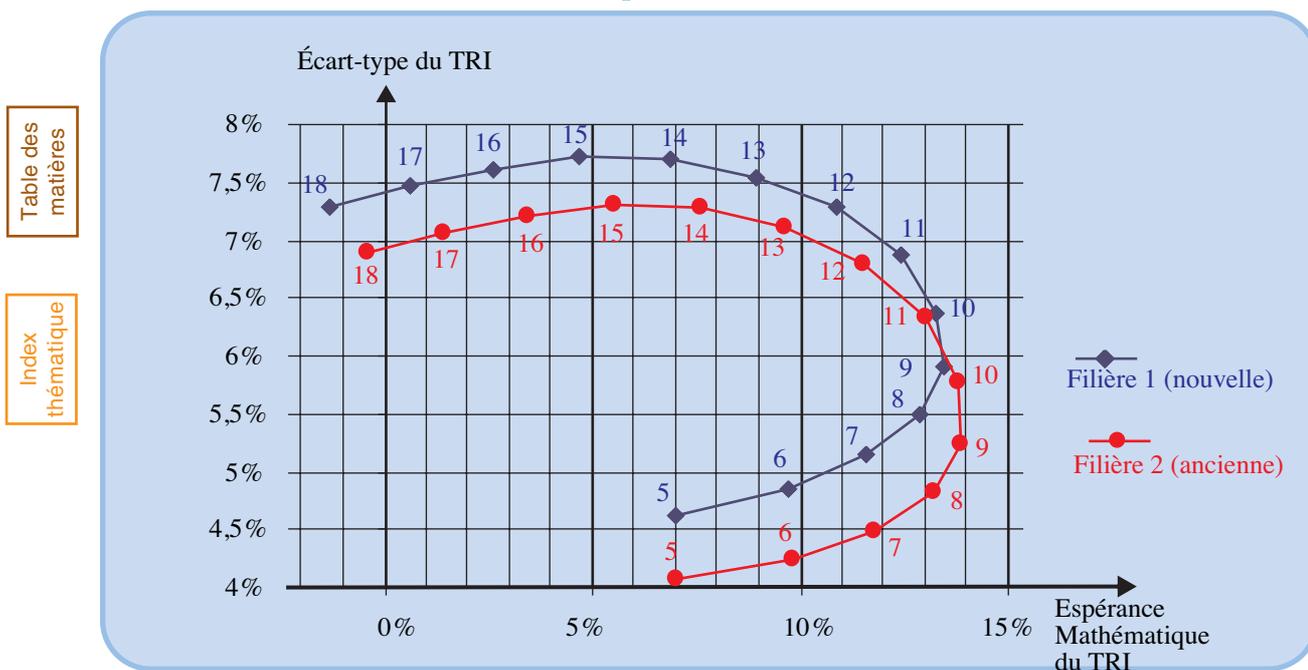
2. Cette interaction est possible dans le modèle linéaire par le biais de variables indicatrices (voir [chapitre XVI, § II-2, page 1135](#)) mais reste limitée. Les principes de modélisation développés au [chapitre XVI, § II-2, page 1135](#), sont utiles dans une modélisation « sous tableur » et ont été utilisés dans cet exemple.

Dans un premier temps, on recherche à optimiser le TRI en déterminant la filière technologique et la capacité installée. L'optimum trouvé est l'utilisation de la filière 2, avec une capacité installée de 9 unités de production, ce qui conduit à une espérance mathématique de TRI égale à 13,4%. Pour prendre un second exemple, on peut imaginer de maximiser le TRI, sous contrainte d'avoir 10% de chances d'obtenir un TRI supérieur à 21%. Dans ce cas, l'optimum trouvé est 13,3% avec une utilisation de la filière 1 et une capacité installée de 10 unités de production.

Le problème posé étant faiblement combinatoire, on peut illustrer pour les deux filières comment varient simultanément l'espérance mathématique du TRI et son écart-type, en fonction des valeurs prises par des variables de commande (figure 53), ce qui permet d'explicitier le problème, classique en finance de marché, de l'**arbitrage entre rentabilité et risque** et de retrouver le concept de solution dominante qui sont celles qui font courir le risque le plus faible pour une rentabilité donnée<sup>1</sup>.

FIGURE 53

*Évolution de l'espérance mathématique et de l'écart-type de la distribution d'échantillonnage des TRI en fonction de la filière et du nombre d'unités productives*



### SECTION III LA DÉTERMINATION DU PROGRAMME OPTIMAL D'INVESTISSEMENT

La détermination du programme optimal d'investissements est une généralisation du problème de la comparaison de deux projets avec une dimension fortement combinatoire puisque l'on a à choisir dans l'ensemble des projets instruits, le sous-ensemble qui sera retenu parce qu'il est le meilleur pour le critère

1. Par exemple, ici, la rentabilité moyenne de 10% peut être obtenue de 4 façons et c'est avec l'usage de 6 machines, dans le cadre de la filière technologique ancienne, que le risque est le plus faible. D'une manière générale, cette filière technologique est dominante par rapport à la filière nouvelle.

retenu et qu'il respecte un ensemble de contraintes physiques et financières. On commencera donc par examiner les critères qui peuvent être mobilisés dans cette prise de décision (§ III-1). Cette comparaison de deux projets pose un certain nombre de problèmes méthodologiques qui seront analysés au § III-2, page 210.

Le problème de la sélection du programme optimal d'investissements se décrit assez bien dans une formulation de programme linéaire qui permet une prise en compte réaliste des interdépendances qui lient les projets (§ III-3, page 216).

On illustrera enfin par des exemples numériques (§ III-4, page 223), la résolution de ce problème de définition du programme optimal d'investissements tant en univers certain qu'en univers aléatoire et en adoptant les différents critères qui auront été proposés.

### III-1 Critères de comparaison des projets d'investissement

Nous examinerons ici, assez succinctement, le problème du choix du critère que l'on retrouve traité dans de nombreux manuels d'initiation en finance, au calcul économique, ou plus particulièrement orientés vers le choix des investissements. Nous jugerons tout d'abord les différentes règles proposées par les praticiens ou les économistes (§ III-1.1) puis nous évoquerons des problèmes d'interprétation et de détermination du taux d'actualisation (§ III-1.2).

#### III-1.1 Jugement des règles de choix proposées par les praticiens et les économistes

Nous verrons tout d'abord des règles de bon sens<sup>1</sup> auxquelles devraient obéir des critères de choix (§ III-1.1.1) avant d'en faire l'application pour rejeter les critères des « praticiens » (§ III-1.1.2, page 201) et accepter des critères proposés par des économistes (§ III-1.1.3, page 202).

##### III-1.1.1 Règles de bon sens auxquelles devraient obéir les critères de choix.

Prenons l'exemple simplifié de la comparaison des échéanciers des 4 projets du tableau 16; chaque échéancier ne diffère d'un autre que sur un seul point.

TABLEAU 16  
*Établissement de critères de choix à partir de l'analyse de projets*

Projets	Investissement au 31/12/2000	Flux Nets de Trésorerie		
		au 31/12/2001	au 31/12/2002	Total
A	- 10000	10000		10000
B	- 10000	10000	1 100	11000
C	- 10000	3762	7762	11524
D	- 10000	5762	5762	11524

Une réflexion de bon sens sur cet exemple conduit aux deux règles suivantes :

1. Voir Bierman & Smidt (1972, [51]), p. 24 -30; l'exemple numérique du § III-1.1.1 est repris de cet ouvrage de référence pour cette réflexion méthodologique. Parmi les ouvrages récents le lecteur peut se reporter au chapitre II de l'ouvrage de M. Albouy (2000, [12]).

- **Règle 1:** Si l'on compare les projets A et B, il est évident que B est préférable à A parce que sa durée de vie plus longue permet d'obtenir en plus du flux net de trésorerie (FNT) que l'on obtient avec le projet A, un FNT supplémentaire.
- **Règle 2:** Si l'on compare les projets C et D, qui procurent l'un et l'autre un même cumul de FNT (11 524), il est évident que le projet D est préférable au projet C puisqu'il anticipe une rentrée financière (2000).

Les critères de comparaison des projets d'investissement ne devront pas violer l'une ou l'autre de ces règles de bon sens.

### III-1.1.2 Rejet des règles empiriques utilisées par certains praticiens

Passons en revue trois de ces règles.

#### III-1.1.2.1 Critère du délai de récupération

C'est le délai au bout duquel l'entreprise recouvre l'investissement initial. Implicitement les flux de trésorerie obtenus après avoir récupéré la mise de fonds initiale sont considérés comme étant «tout bénéfice» et le plus important est de récupérer rapidement sa mise de fonds pour la replacer «ailleurs». Dans notre exemple on a, avec utilisation de l'interpolation linéaire, le classement du [tableau 17](#).

TABLEAU 17  
*Application du critère du délai de récupération*

Projets	A	B	C	D
Valeur du critère	1	1	1,8	1,7
Rang	1er ex aequo	1er ex aequo	4e	3e

La règle 1 n'est donc pas respectée (puisque B n'est pas préféré à A); en outre, si l'investissement pour C et D est de 11 524, la règle 2 est en défaut. Ce critère est souvent utilisé par les praticiens qui souhaitent par ce biais intégrer la notion de risque.

#### III-1.1.2.2 Critère de la recette moyenne par euro engagé

L'application de ce critère ([tableau 18](#)) conduit à une violation de la règle 2.

TABLEAU 18  
*Application du critère de la recette moyenne par euro engagé*

Projets	A	B	C	D
Recette totale	10000	11000	11524	11524
Investissement	10000	10000	10000	10000
Valeur du critère <sup>1</sup>	1,00	1,10	1,15	1,15
Rang	4e	3e	1er ex aequo	1er ex aequo

1. Valeur du critère = Recette totale/Investissement.

### III-1.1.2.3 Critère du revenu moyen sur valeur comptable de l'investissement

Ce critère, illustré par le [tableau 19](#), est, à une transformation linéaire près, identique au précédent si l'amortissement linéaire est utilisé (sinon il peut donner des classements différents); il conduit à une violation de la règle 2.

### III-1.1.3 Critères proposés par les économistes

Les principaux critères proposés sont au nombre de deux : le Flux Net de Trésorerie Actualisé (FNTA) et le taux de rentabilité interne (TRI).

TABLEAU 19

Application du critère du revenu moyen sur valeur comptable de l'investissement

Projets	A	B	C	D
Amortissement linéaire moyen	10000	5000	5000	5000
Flux Net de Trésorerie moyen	10000	5550	5762	5762
Revenu moyen <sup>1</sup>	0	550	762	762
Valeur comptable moyenne <sup>2</sup>	5000	5000	5000	5000
Valeur du critère <sup>3</sup>	0%	11%	15%	15%
Rang	4e	3e	1er ex aequo	1er ex aequo

1. Revenu moyen = Flux Net de Trésorerie moyen – Amortissement linéaire moyen.

2. Valeur comptable moyenne = Investissement/2.

3. Valeur du critère = Revenu moyen/Valeur comptable moyenne.

#### III-1.1.3.1 Le Flux Net de Trésorerie Actualisé (FNTA)

Le FNTA, appelé encore par certains auteurs **Valeur Actuelle Nette** (VAN) mais cette désignation est moins précise, est la somme des Valeurs actualisées des FNT secrétés chaque année par le projet d'investissement considéré. Pour un taux d'actualisation  $\alpha$  constant au cours du temps<sup>1</sup> et un projet dont les  $FN_T$  sont secrétés à la fin des années 0 à T, le FNTA à l'année 0 est défini par la [relation 22](#):

$$FNTA = \sum_{t=0}^T FNT_t (1 + \alpha)^{-t} \quad \text{relation 22}$$

Par exemple, le FNTA à 6% du projet B est:

$$FNTA_B = -10000 + \frac{10000}{1,06} + \frac{1100}{1,06^2} = -10000 + 9434 + 979 = +413$$

L'application de ce critère<sup>2</sup>, dans notre exemple, conduit au [tableau 20](#), où l'on constate que si les deux règles de bon sens sont respectées, le rang est fonction du taux d'actualisation retenu.

1. La constance du taux d'actualisation est une simplification que les spécialistes de la théorie financière n'acceptent pas en univers non certain. Dans ce chapitre, on conservera cette simplification notamment parce que les erreurs engendrées sont du second ordre par rapport à la précision des données manipulées.

2. Certains spécialistes proposent d'utiliser le critère du **taux d'enrichissement relatif**, quotient du FNTA à l'investissement pour sélectionner les projets en cas de demande excessive de budget pour le taux d'actualisation retenu. La position la plus fréquente chez les financiers (voir, par exemple, Albouy, [12], chapitre II) est de considérer que le taux d'actualisation est un coût moyen pondéré du capital et que les grandes entreprises ayant accès au marché financier, une régulation s'opère par le marché.

TABLEAU 20  
Application du critère du FNTA

Projets	A	B	C	D
Valeur du FNTA à 6%	- 570	+ 413	+ 457	+ 564
Rang	4e	3e	2e	1e
Valeur du FNTA à 30%	- 2308	- 1657	- 2513	- 2158
Rang	3e	1e	4e	2e

### III-1.1.3.2 Le Taux de Rentabilité Interne (TRI)

Le **taux de rentabilité interne** d'un projet (TRI), appelé encore par certains auteurs<sup>1</sup> le **Taux Moyen de Rentabilité** (TMR), est le taux d'actualisation qui rend nul le FNTA de ce projet<sup>2</sup>. L'implication de ce critère donne conduit au **tableau 21**, où l'on peut constater que ce critère respecte les deux règles de bon sens. L'utilisation de ce critère peut conduire à des classements différents de celui obtenu avec celui du FNTA<sup>3</sup>.

TABLEAU 21  
Application du critère du TRI

Projets	A	B	C	D
Valeur du critère	0%	10%	8,9%	10%
Rang	4e	1er ex aequo	3e	1er ex aequo

Table des  
matières

Index  
thématique

Ce critère est utilisé dans certaines entreprises où l'on donne le feu vert à toute opération dont le TRI est supérieur à  $x\%$ ; mais d'un point de vue pratique, il est plus simple de calculer le FNTA d'un projet à ce taux et de voir si ce FNTA est positif (auquel cas son TRI est supérieur à  $x$ ).

L'avantage du FNTA sur le TRI, est d'être un critère additif: le FNTA à 6% de la réalisation simultanée de C et D est de  $457 + 564 = 1021$ , tandis que le TRI de cette réalisation simultanée ne peut s'obtenir simplement à partir des TRI des projets d'origine. Cet avantage, décisif du point de vue des calculs jusqu'à il y a une trentaine d'années<sup>4</sup>, explique sans doute la préférence des économistes et gestionnaires pour le FNTA.

## III-1.2 Problèmes posés par l'actualisation

Préalablement à tout calcul de FNTA, on doit se demander la signification qu'il convient de donner à un FNTA (§ III-1.2.1) et déterminer un taux d'actualisation de référence (§ III-1.2.2, page 205).

1. D'autres réservent cette appellation au critère décrit au § III-1.1.2.3, page 202.

2. Ce taux peut ne pas être unique (cas de solutions réelles multiples de l'équation polynomiale de degré T).

3. Ce point sera illustré par l'exemple numérique du § III-4, page 223.

4. Cet avantage est quasi inexistant maintenant comme on le verra dans l'exemple du § III-4, page 223.

### III-1.2.1 Signification de l'actualisation

Trois justifications ont été trouvées à l'actualisation, mais seule la dernière justifie l'utilisation de l'actualisation dans la comparaison des projets d'investissement<sup>1</sup>.

#### III-1.2.1.1 Prise en compte d'une incertitude qui croît avec l'éloignement de l'horizon économique considéré

L'actualisation a pour effet d'accorder une pondération décroissante avec l'éloignement temporel, cette décroissance étant d'autant plus marquée que le taux d'actualisation est élevé. On peut constater ces deux propriétés dans l'exemple du [tableau 22](#), mais il convient de souligner qu'il s'agit là d'un effet et non d'un but de la technique d'actualisation qui ne constitue pas un moyen acceptable de rendre compte du risque<sup>2</sup>.

TABLEAU 22  
Illustration de la croissance du poids relatif des FNT immédiats avec le taux d'actualisation

Temps		$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	Total
FNT <sub>t</sub>		-10000	5000	4000	6000	5000
$\alpha$	Temps	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	Total
0%	$(1 + \alpha)^{-t}$	1	1	1	1	4
	$FNT_t (1 + \alpha)^{-t}$	-10000	5000	4000	6000	5000
	$\frac{FNT_t (1 + \alpha)^{-t}}{\sum_{i=1}^3 FNT_i (1 + \alpha)^{-i}}$	-	33,33%	26,67%	40,00%	100%
5%	$(1 + \alpha)^{-t}$	1	0,95238	0,90703	0,86384	3,72325
	$FNT_t (1 + \alpha)^{-t}$	-10000	4762	3628	5183	3573
	$\frac{FNT_t (1 + \alpha)^{-t}}{\sum_{i=1}^3 FNT_i (1 + \alpha)^{-i}}$	-	35,08%	26,73%	38,19%	100%
10%	$(1 + \alpha)^{-t}$	1	0,90909	0,82645	0,75131	3,48685
	$FNT_t (1 + \alpha)^{-t}$	-10000	4545	3306	4508	2359
	$\frac{FNT_t (1 + \alpha)^{-t}}{\sum_{i=1}^3 FNT_i (1 + \alpha)^{-i}}$	-	36,78%	26,75%	36,47%	100%
15%	$(1 + \alpha)^{-t}$	1	0,86957	0,75614	0,65752	3,28323
	$FNT_t (1 + \alpha)^{-t}$	-10000	4348	3025	3945	1317
	$\frac{FNT_t (1 + \alpha)^{-t}}{\sum_{i=1}^3 FNT_i (1 + \alpha)^{-i}}$	-	38,42%	26,72%	34,86%	100%

Table des matières

Index thématique

1. Voir Bierman & Smidt (1972, [51]).

2. Voir Maillet (1974, [289]), p. 231 à 233.

### III-1.2.1.2 Introduction de la préférence de temps

Cette justification est la traduction sophistiquée de l'adage populaire «un tiens vaut mieux que deux tu l'auras». Autrement dit, l'agent économique préfère «consommer» immédiatement les sommes disponibles parce que la prime d'attente offerte en cas de consommation différée n'est pas assez attractive. Cette approche subjective n'est pas suffisante pour étayer l'utilisation de l'actualisation en matière de choix d'investissement car une partie des projets examinés est financée sur emprunt et donc n'implique pas de différer une quelconque consommation (distribution de dividendes, par exemple).

### III-1.2.1.3 Alternatives possibles dans l'utilisation des capitaux

Un projet d'investissement ne peut être jugé isolément, mais doit l'être en comparaison avec d'autres projets internes à l'entreprise (y compris le remboursement anticipé d'emprunts contractés antérieurement) et même externes à l'entreprise (prises de participation, placements sur le marché monétaire ou financier). Ces opportunités, tant internes qu'externes, conduisent à rejeter l'existence de fonds gratuits. La comparaison entre projets doit donc se faire à partir d'une rémunération implicite minimale des capitaux, de niveau (= taux d'actualisation de référence) à déterminer (voir § III-1.2.2) et que seule la technique d'actualisation prend correctement en compte.

Si l'on préfère se ramener à la notion plus familière de capitalisation (à un taux d'intérêt moyen identique au taux d'actualisation de référence) d'échéanciers relatifs à des projets de même durée de vie, il est facile de constater que les valeurs capitalisées sont, à un facteur constant multiplicatif près, égales aux valeurs actualisées<sup>1</sup> et qu'en conséquence les classements des projets auxquels conduisent ces deux critères, sont égaux. Cette constatation ne préjuge en rien la rentabilité effective des projets ultérieurs qui seront financés à l'aide de ces flux.

Table des matières

Index thématique

### III-1.2.2 Détermination du taux d'actualisation de référence

La détermination du taux d'actualisation de référence est fondamentale, car le classement des projets selon leur rentabilité peut varier avec le taux d'actualisation retenu. On examinera d'abord ce point (§ III-1.2.2.1) avant de présenter les règles de définition du taux d'actualisation de référence (§ III-1.2.2.2, page 206) et d'examiner l'incidence de l'usage du bilan différentiel (§ III-1.2.2.3, page 209).

#### III-1.2.2.1 Importance du problème

Pour illustrer l'importance du choix d'un taux d'actualisation économiquement correct, il suffit d'analyser l'exemple numérique du [tableau 23 de la page 206](#) qui décrit les FNT de 4 projets de même durée et correspondant à un même investissement, afin d'éviter toute source de distorsion dans les comparaisons; les valeurs actualisées de ces échéanciers sont données au [tableau 24 de la page 206](#) et portées dans la [figure 54, page 207](#).

1. En posant  $FNTA_i$ , le Flux Net de Trésorerie Actualisé du projet  $i$ , au taux  $\alpha$ , en  $t = 0$  et  $FNTC_i$ , le Flux Net de Trésorerie capitalisé en  $t = T$ , il est évident que  $FNTA_i = \sum_{t=0}^T \frac{FNT_{it}}{(1+\alpha)^t}$  et  $FNTC_i = \sum_{t=0}^T FNT_{it}(1+\alpha)^{T-t}$  entraîne  $FNTC_i = FNTA_i(1+\alpha)^T$ .

TABLEAU 23  
Exemple de projets à comparer

Projets	Fin de l'année						$\Sigma$	TRI
	0	1	2	3	4	5		
A	-10000	2100	2600	2800	4200	4300	6000	15,64%
B	-10000	2000	3400	2500	3400	4000	5300	14,56%
C	-10000	1900	3500	2600	4100	6300	8400	20,11%
D	-10000	5300	3600	2600	1800	1400	4700	19,13%

TABLEAU 24  
Actualisation des échéanciers des projets

Taux	2%	4%	6%	8%	10%	12%	14%	16%	18%	20%	22%	24%	26%	28%	30%
A	4874	3881	3006	2231	1546	937	397	-83	-511	-892	-1232	-1535	-1806	-2048	-2264
B	4263	3349	2541	1827	1193	630	130	-315	-711	-1065	-1381	-1663	-1915	-2140	-2342
C	7030	5824	4760	3820	2987	2248	1591	1007	487	23	-391	-762	-1093	-1390	-1655
D	3958	3294	2697	2161	1678	1242	848	492	169	-123	-389	-631	-850	-1050	-1232

L'examen de cet exemple montre que si l'on dispose d'un budget de 20000, le choix des deux projets les plus rentables varie en fonction du taux d'actualisation retenu: jusqu'à un peu plus de 8%, il faut retenir les projets A et C et qu'au delà, il convient de retenir les projets C et D. L'intersection de deux courbes dans la [figure 54](#) qui modifie le classement des deux projets concernés est appelée **intersection de Fisher**.

Le taux d'actualisation doit être fondé économiquement, faute de quoi des erreurs de choix pouvant être lourdes de conséquences pour l'entreprise sur le plan financier et technique (choix d'une filière de production) peuvent être commises<sup>1</sup>.

### III-1.2.2.2 Détermination du taux d'actualisation de référence

Deux écoles s'affrontent sur ce point: la première préconise d'utiliser un coût moyen pondéré des capitaux<sup>2</sup> figurant au bilan et est donc orientée vers le passé de l'entreprise. La seconde école est au contraire tournée vers l'avenir et considère que le taux d'actualisation de référence découle du «portefeuille de projets d'investissement» de l'entreprise, et n'est que le prix d'une ressource rare matérialisée par le budget d'investissement et dans ces conditions, le taux d'actualisation de référence doit être égal au taux de rentabilité du dernier projet que l'entreprise peut entreprendre et que l'on qualifie de projet marginal<sup>3</sup>. Cette règle est à interpréter de deux façons différentes, selon que les capacités d'endettement sont atteintes ou non.

1. Les spécialistes qui acceptent l'hypothèse de l'efficacité des marchés estiment que le taux d'actualisation n'est pas directement lié à l'enveloppe budgétaire de l'entreprise, celle-ci étant extensible en fonction des caractéristiques de ces marchés. Cette hypothèse nous semble trop forte.

2. Voir, par exemple, Van Horne (1977, [427]), p. 330 - 331. Certains auteurs sont cependant moins «tournés vers le passé» et raisonnent sur une structure financière «objectif» d'où se dégage un taux pondéré suffisant pour rémunérer les actionnaires et prêteurs compte tenu du niveau de risque encouru.

3. Sa détermination peut ne pas être immédiate si les projets d'investissements ne sont pas indépendants et divisibles.

FIGURE 54  
Évolution des FNTA en fonction du taux d'actualisation

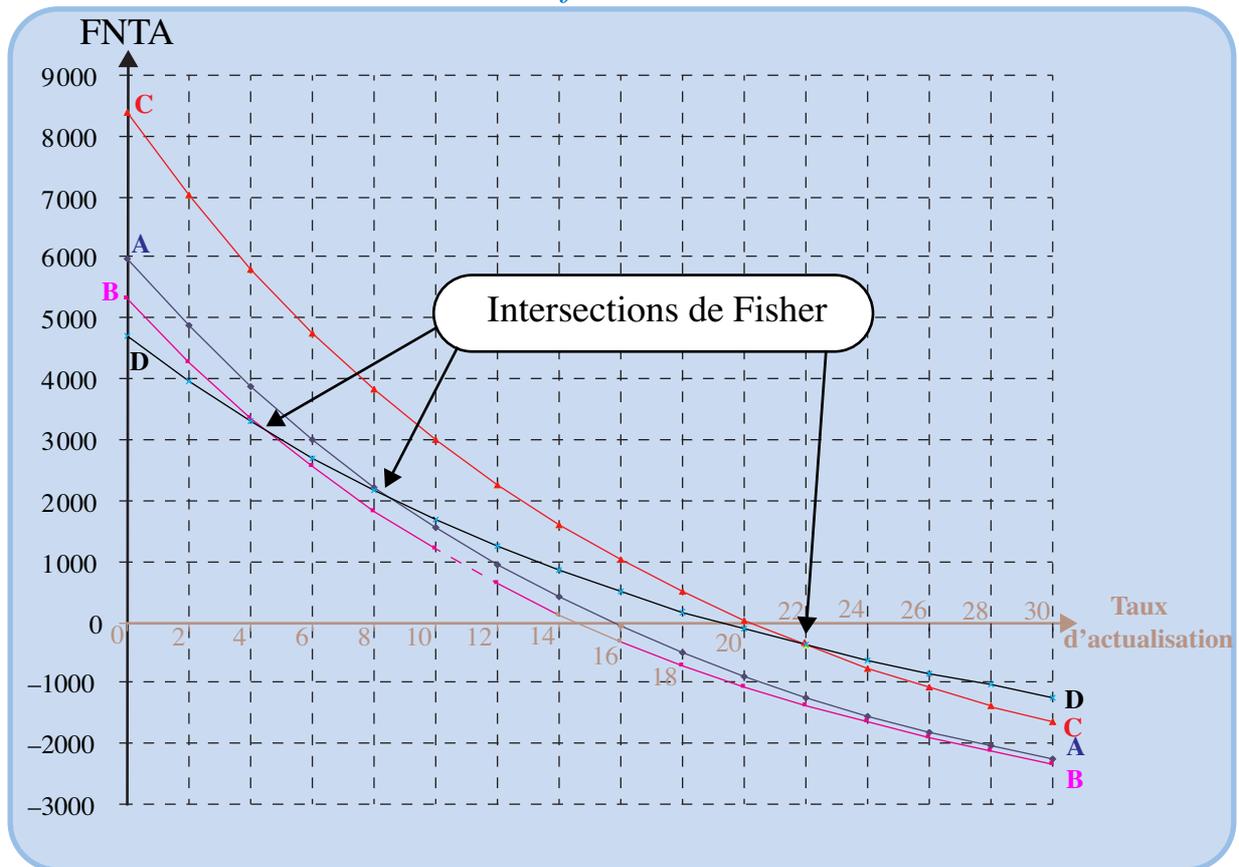


Table des matières

Index thématique

- *Entreprise n'ayant pas épuisé ses capacités d'endettement*

L'entreprise fera normalement appel à des fonds extérieurs tant que la rentabilité du projet supplémentaire examiné est supérieure au taux d'intérêt de l'emprunt; elle s'arrêtera normalement lorsque le taux de rentabilité interne du projet marginal, noté  $\omega$ , devient égal au taux de l'emprunt supplémentaire, nécessaire à sa réalisation (voir [figure 55, page 208](#)). L'introduction du risque conduit les financiers à considérer que l'adaptation passe par une transformation de la structure du capital et que donc, implicitement, seul ce cas de figure est à prendre en compte, ce qui repose sur l'hypothèse d'une efficacité des marchés financiers.

- *Entreprise ayant épuisé ses capacités d'endettement*

Si l'entreprise ne souhaite pas dépasser un certain niveau d'emprunt (pour respecter une certaine structure financière, par exemple), ou si elle n'obtient pas la totalité des concours bancaires souhaités, l'entreprise doit retenir comme taux d'actualisation, celui qui égalise l'offre et la demande de capitaux (voir [figure 56, page 208](#)) et non un taux arbitraire comme le taux  $\gamma$  de l'emprunt marginal<sup>1</sup>.

1. L'utilisation d'un taux d'actualisation inférieur au taux correctement calculé (cas de certaines entreprises publiques auxquelles les autorités de tutelle imposent à la fois un taux d'actualisation et une enveloppe budgétaire par le biais de l'autorisation de hausses tarifaires et de restrictions d'accès au marché financier) a conduit certains économistes à proposer des critères additionnels de comparaison pour éliminer certains projets rentables au taux d'actualisation imposé. Ces critères empiriques sont dénués de justifications théoriques.

FIGURE 55

Détermination du taux d'actualisation de référence pour une entreprise n'ayant pas épuisé ses capacités d'endettement

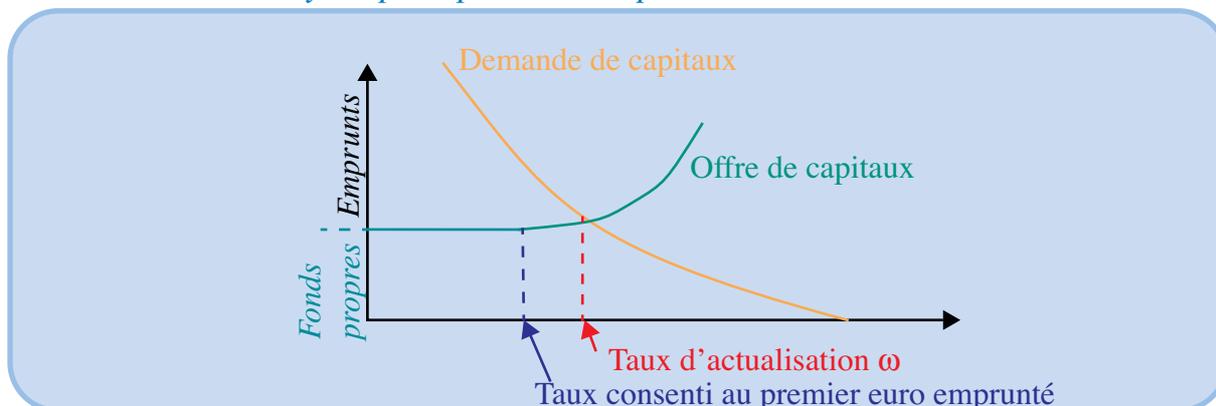
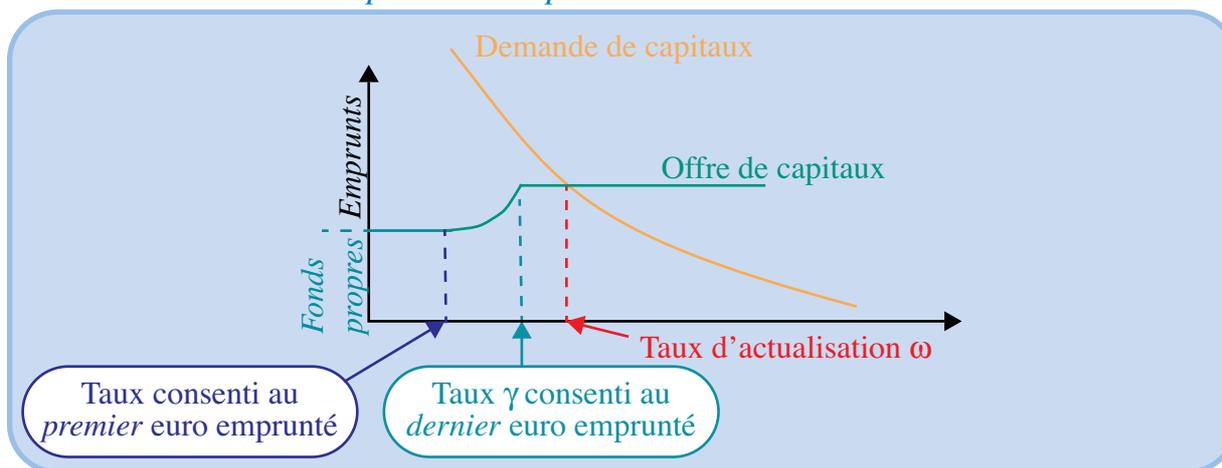


FIGURE 56

Détermination du taux d'actualisation de référence pour une entreprise ayant épuisé ses capacités d'endettement



Ces principes de détermination des taux d'actualisation de référence ont deux conséquences pratiques :

- Tout d'abord, la connaissance du taux d'actualisation implique celle des projets sélectionnés qui dépend elle-même du taux d'actualisation. De nos jours, ce problème numérique est assez facile à résoudre sur tableur avec un add-in approprié. Nous illustrerons cette recherche au § III-4.1.2, page 224, avec un exemple prenant en compte les principaux problèmes méthodologiques rencontrés dans ce chapitre mais nous traiterons aussi le cas, plus simple, de la détermination du programme optimal d'investissement avec l'usage d'un taux d'actualisation imposé (§ III-4.1.1, page 224).
- Ensuite, ce qui importe avant tout dans le FNTA associé à chaque projet, c'est son signe et non son montant (sauf dans certains cas de dépendance entre projets), ce qui permet d'analyser le FNTA du programme (= somme des FNTA des projets retenus) comme une « prime » qui vient s'ajouter à la rémunération minimale du capital implicitement fournie par le taux d'actualisation  $\alpha$ .

Il est possible d'aller plus loin dans cette vision prospective de la détermination du programme d'investissement car il nous semble en définitive plus réaliste et

compréhensible de chercher à **maximiser la rentabilité de l'enveloppe budgétaire que l'on désire consommer**, ce TRI optimal correspondant en fait à un taux d'actualisation de référence. Les problèmes numériques posés par une telle position n'en sont plus depuis quelques années, avec les moyens algorithmiques et informatiques dont on dispose et nous illustrerons cette optimisation du TRI de la consommation budgétaire au § III-4.1.3, page 225 (en nous appuyant sur le même exemple que celui utilisé pour illustrer les autres méthodes). Dans cette perspective, on étudie des scénarios de fourchettes d'enveloppes de dépenses d'investissement financées par un appel plus ou moins important à l'emprunt et l'on recherche, pour chaque scénario, le programme d'investissement qui maximise la rentabilité de la dépense d'investissement.

Cette position n'enlève pas tout intérêt à la détermination du **taux d'actualisation de référence** qui n'est alors **plus utilisé pour choisir le programme optimal d'investissement mais pour assurer une certaine cohérence temporelle des décisions**, comme on l'a proposé au chapitre II, § IV-1, page 228, avec l'utilisation de l'amortissement économique. Dans cette optique de calcul d'un amortissement économique et compte tenu des remarques que l'on va faire au § III-1.2.2.3, il nous semble préférable de fixer le taux d'actualisation de référence en accord avec le point de vue rétrospectif (coût moyen pondéré des capitaux figurant au bilan) parce qu'il repose sur une certaine stabilité des attentes des propriétaires et apporteurs de capitaux, en matière de rémunération, dans un contexte technico-économique donné.

Table des matières

### III-1.2.2.3 Impact de l'approche de l'analyse des projets par le bilan différentiel sur la rentabilité du programme d'investissement

Index thématique

On a vu que l'analyse des projets d'investissement passe nécessairement par un bilan différentiel (§ II-2.2.1, page 177). Dès lors, on considère implicitement comme acquise la consommation du budget correspondant au cumul des investissements des solutions de référence<sup>1</sup> de chaque groupe de projets alternatifs dans lesquels l'un des projets est nécessairement retenu parce que le groupe de projets alternatifs conditionne la poursuite d'activités que l'on a décidé de ne pas remettre en cause. Cette décision peut avoir été prise pour des raisons stratégiques et ne générer que des flux de dépenses sans impact décelable sur les recettes<sup>2</sup>; elle peut aussi correspondre à la continuation de décisions antérieurement prises et que l'on n'envisage pas de remettre en cause (par exemple, investissement lié à un élargissement d'une gamme de produits, conformément à un plan de développement arrêté lors du lancement de la gamme).

La rentabilité de cette consommation budgétaire minimale ne peut être facilement déterminée car elle met en jeu toute une série de décisions antérieures à celles du choix du programme d'investissement analysé ici. C'est sur la consommation budgétaire additionnelle que se concentrent les décisions à prendre et *la rentabilité que l'on mesure porte sur cette seule consommation budgétaire*

1. À condition que ceux-ci soient correctement choisis, c'est-à-dire que les solutions alternatives aient une rentabilité différentielle positive.

2. Par exemple, un constructeur automobile peut décider que l'activité de fonderie relève de ses activités de base, pour des raisons de qualité et de sécurité. Dans ces conditions, le remplacement d'un four électrique ou d'un cubilot ne se discute pas, ce qui fait l'objet d'un choix, c'est le type de matériel de remplacement.

*additionnelle*. Cette observation reste valable, quelle que soit l'école à laquelle on se rattache dans la détermination du taux d'actualisation de référence.

### III-2 Problèmes méthodologiques posés par la comparaison de deux projets

Le premier problème est lié à l'homogénéité des FNTA calculés (§ III-2.1) et le second (§ III-2.2, page 211) à l'inégalité des durées de vie des projets.

#### III-2.1 Homogénéité des FNTA calculés

Le bilan actualisé d'un projet est nécessairement un bilan différentiel, puisque les FNT sont tous calculés par différence entre une solution de référence et une solution nouvelle associée à la réalisation du projet (cf. § II-2.2.1, page 177). La comparaison des FNTA de deux projets est donc conditionnée par les solutions de référence sous-jacentes et ne pas en tenir compte peut conduire à de graves erreurs de jugement s'appuyant sur une apparence de rigueur scientifique. Parmi les problèmes rencontrés en pratique, trois nous paraissent devoir être signalés.

##### III-2.1.1 Possibilité de retenir un projet ayant une rentabilité absolue négative

Ce cas de figure peut se produire lorsque des recettes sont associées au projet. La variation de FNT du bilan différentiel est en général imputable à un effet de productivité, mais l'investissement de la solution nouvelle peut fort bien correspondre à un *investissement mixte de productivité et de capacité* (auquel cas un accroissement de recettes s'ajoute aux économies de dépenses).

L'exemple numérique du [tableau 25](#) illustre ce cas de figure: le TRI du bilan différentiel est de 19% alors que la rentabilité absolue du projet ( $A_2$ ) est négative. Sur la base du bilan différentiel et d'un taux d'actualisation inférieur à 19%, on peut donc être amené à retenir un projet non rentable au détriment d'un projet rentable. Cela étant, la poursuite d'activités non rentables peut résulter d'une décision stratégique: vouloir se placer sur un marché porteur, vouloir offrir une large gamme de produits ou de services, etc.

TABLEAU 25  
*Exemple de possibilité de sélection d'un projet à rentabilité négative*

Projet	0	1	2	3	4	5	Total	TRI
$A_1$	-20000	1500	3000	4000	2000	3000	-6500	-11,39%
$A_2$	-25000	3000	5000	6000	3000	4500	-3500	-4,76%
$A_2 - A_1$	-5000	1500	2000	2000	1000	1500	3000	18,88%

##### III-2.1.2 Possibilité d'«engraisser» un projet très rentable

L'une des pratiques courantes (et souvent difficile à détecter) consiste à inclure dans les dépenses d'investissement et/ou de fonctionnement d'un projet à très forte rentabilité (et donc assuré d'être retenu par la direction) des dépenses non directement liées à l'objet initial du projet. Par exemple, le bilan actualisé d'un projet de rénovation d'un atelier de peinture peut être «grevé» par l'introduction de nouveaux engins de manutention de performances nettement supérieures à

celles dont on a besoin, alors qu'il existe des engins moins chers et mieux adaptés. Ces dépenses «de prestige» faussent la comparaison des projets d'investissement.

### III-2.1.3 Impossibilité de comparer directement certains projets

Il est bien connu en comptabilité analytique que certaines dépenses ne peuvent être affectées à un produit parce qu'elles contribuent directement ou indirectement à la fabrication de plusieurs produits. Un grand nombre de projets d'investissement fournissent des prestations de cette nature; leurs FNT sont nécessairement tous négatifs, et donc leurs FNTA également. La comparaison de deux projets de ce type n'a de sens que si ces projets fournissent des prestations comparables et si ces projets sont exclusifs (ce qui conduit implicitement à des bilans différentiels).

S'il n'en est pas ainsi, la comparaison des FNTA de deux projets est sans intérêt. Il est inutile, par exemple, de comparer l'achat d'un engin de manutention et celui d'un serveur d'applications informatiques, par contre l'examen des bilans actualisés de plusieurs modèles d'engins de manutention est riche d'intérêt. Cette comparaison a cependant un sens au niveau «global» de la détermination du programme d'investissement où l'on doit tenir compte des rapports coût/performance des différents projets (exclusifs ou non) et en même temps de la concurrence que ceux-ci entretiennent dans l'utilisation des ressources rares. Ce problème sera abordé au § III-3, page 216.

Lorsqu'à un projet on peut associer directement une recette ou un accroissement de recette, son FNTA peut être positif. La comparaison directe d'un projet à FNTA positif et d'un projet à FNTA négatif du type de celui envisagé précédemment n'a pas grand sens, sauf, là encore, dans le cadre de la détermination du programme optimal d'investissement.

Table des  
matières

### III-2.2 Prise en compte de l'inégalité des durées de vie des projets

Le plus souvent, les projets examinés sont de durées de vie différentes. La comparaison de leurs intérêts respectifs par le critère du FNTA est quelque peu faussée puisque l'argent dépensé pour ces investissements n'est pas immobilisé durant la même période, ce qu'illustre l'exemple du [tableau 26](#). Trois solutions sont envisageables, chacune d'elles présentant des avantages et des inconvénients, mais il est essentiel de s'en tenir toujours à la même pour calculer les FNTA servant à déterminer le programme optimal d'investissement. Les deux premières solutions reposent sur le réinvestissement, en fin de durée de vie, de la somme initialement immobilisée, tandis que la dernière s'appuie sur un horizon économique commun à tous les projets.

Index  
thématique

TABLEAU 26  
*Exemple de projets à durées de vie inégales*

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	TRI	FNTA à 5%
Projet 1	-5000	2000	1900	2200					10,46 %	528,56
Projet 2	-5000	1800	1500	1400	900	800			10,36%	651,46
Projet 3	-5000	1200	1000	1100	1200	700	800	900	9,42 %	772,40

### III-2.2.1 Réinvestissement dans le même projet

Cette solution peut revêtir deux formes : l'entreprise peut raisonner sur le plus petit commun multiple des durées de vie des projets soumis à la sélection budgétaire, mais elle peut aussi supposer, pour chaque projet, un renouvellement à l'identique jusqu'à l'infini (qui est le plus grand commun multiple). En pratique, le PPCM est très élevé et les résultats sont sans différence significative que l'on suive l'une ou l'autre méthode.

L'entreprise est obligée de faire explicitement des hypothèses sur l'évolution des échéanciers à prendre en considération. Une hypothèse simplificatrice couramment admise consiste à *reconduire les échéanciers jusqu'à l'infini*. Ceci n'est réaliste qu'à condition de supposer que la production permise par l'investissement considéré est stable et de recettes sensiblement constantes, ce qui fait que l'évolution de l'échéancier de flux nets de trésorerie ne s'explique que par celle des coûts. Cette solution amène deux remarques :

- À terme, les conditions d'offres et de demandes du bien ou du service considéré modifieront profondément les données du problème. Toutefois, avec un taux d'actualisation pas trop bas, l'incidence des années éloignées est faible dans un calcul d'actualisation, en conséquence de quoi la répercussion d'erreurs de prévision l'est aussi.
- L'utilisation de cette hypothèse implicite n'est pensable qu'à la condition que la production du bien ou du service considéré soit en régime de croisière et non en phase de démarrage ou de déclin. Cette remarque est importante car il est normal, pour une entreprise, d'envisager le lancement de produits ou services nouveaux, concurremment à la poursuite d'activités anciennes. Il conviendra donc pour ces produits ou services de formuler des hypothèses de régime permanent afin de ne pas sous-évaluer leur intérêt économique.

Si l'on note  $FNTA_n$ , le flux net de trésorerie actualisé sur la durée de vie effective  $n$  du projet, le renouvellement à l'identique, jusqu'à l'infini, revient à écrire :

$$FNTA_{\infty} = FNTA_n \sum_{t=0}^{\infty} (1 + \alpha)^{-nt} = \frac{FNTA_n}{1 - (1 + \alpha)^{-n}} \quad \text{relation 23}$$

Le **tableau 27** illustre l'application de cette solution avec  $\alpha = 5\%$ .

TABLEAU 27  
*Correction de l'inégalité des durées de vie par la chaîne infinie de remplacement à l'identique*

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	FNTA à 5%	FNTA <sub>∞</sub> à 5%
Projet 1	-5000	2000	1900	2200					528,56	3881,84
Projet 2	-5000	1800	1500	1400	900	800			651,46	3009,40
Projet 3	-5000	1200	1000	1100	1200	700	800	900	772,40	2669,74

La solution consistant à utiliser, sur l'horizon infini, un échéancier constant  $y$ , calculé comme donnant la même valeur actualisée sur la durée de vie effective  $n$  du projet que celle de l'échéancier réel conduit, à un facteur multiplicatif près, à

la même solution que celle du renouvellement à l'identique sur une période infinie, ce que montre la [relation 24](#).

$$y = \text{FNTA}_n \frac{\alpha}{1 - (1 + \alpha)^{-n}} = \alpha \cdot \text{FNTA}_\infty \quad \text{relation 24}$$

Si ces deux solutions aboutissent au même classement des projets, la première nous semble préférable car elle met l'accent sur l'incidence réelle de l'inégalité des durées de vie et le réemploi possible des sommes dégagées, et force à faire des hypothèses sur la rentabilité du placement des sommes libérées. Dans la seconde solution, celle-ci est toujours implicitement égale à la rentabilité du projet qui libère ces sommes ; il s'agit là d'une hypothèse forte qu'il vaut mieux expliciter.

On peut ajouter enfin que, normalement, les projets internes à l'entreprise ont une rentabilité supérieure au taux hors risque qui est celui des placements présentant une garantie absolue (bons du Trésor, etc.). Il s'ensuit que le taux d'actualisation de l'entreprise est normalement supérieur au taux hors risque. Il est alors facile de constater d'après les formules de termes correctifs que si on retenait le taux hors risque pour calculer la rentabilité du réemploi des capitaux, le terme correctif à ajouter serait négatif, ce qui serait aberrant. Remarquons en outre que retenir une rentabilité des capitaux réinvestis égale à la rentabilité marginale, revient à rendre nul le terme correctif, et donc à ne pas tenir compte des inégalités de durées de vie<sup>1</sup>.

Table des matières

Index thématique

### III-2.2.2 Réinvestissement dans un «projet moyen»

Comme dans la première solution, l'entreprise considère qu'en fin de durée de vie, un montant égal à l'investissement initial est réinvesti, mais sa rentabilité est égale à la rentabilité moyenne des capitaux. Cette rentabilité moyenne est obligatoirement supérieure à la rentabilité marginale, cette dernière définissant le taux d'actualisation. Ce choix se base sur l'hypothèse que, dans l'avenir, la distribution des taux de rentabilité interne des différents projets ne sera guère différente de celle observée et résulte en outre du refus d'affecter à un projet particulier, les sommes libérées par tous les équipements en fin de vie, au cours de l'année considérée. Toutefois, par prudence, l'entreprise peut être amenée à minorer le taux de rentabilité moyen à utiliser, prenant de ce fait une certaine «assurance» sur l'avenir.

Le taux d'actualisation utilisé dans l'exemple précédent (5%) correspondait au taux de rentabilité du projet marginal. Supposons maintenant que les capitaux investis dans l'entreprise dégagent, en moyenne, une rentabilité de 10%. On considérera alors qu'à la fin de la durée de vie des projets 1 et 2 (respectivement 3 et 5 ans), l'entreprise investira une somme égale à l'investissement initial pour récupérer respectivement au bout de 4 et 2 ans (c'est-à-dire au terme du projet le plus long) ce montant capitalisé à 10%. On obtient alors les FNTA du [tableau 28](#).

Ajoutons, ce qui est mathématiquement évident, que cette correction est inutile lorsque le taux d'actualisation utilisé est justement ce taux moyen. Si la sélection s'effectue sur la base d'une maximisation du TRI de la dépense d'investissement

1. Il est à noter que cette solution a la préférence des nombreux financiers qui évacuent de ce fait le problème de l'inégalité des durées de vie.

TABLEAU 28  
Correction de l'inégalité des durées de vie par la chaîne infinie de remplacement à l'identique

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	FNTA corrigé
Projet 1	-5000	2000	1900	2200 - 5000				+ 5500 x 1,1 <sup>7-3</sup>	1 186,72
Projet 2	-5000	1800	1500	1400	900	800 - 5000		+ 5500 x 1,1 <sup>7-5</sup>	2 196,49
Projet 3	-5000	1200	1000	1100	1200	700	800	900	772,40

(voir page 209), il faut considérer que cette rentabilité moyenne est égale à ce TRI pour rendre cette correction inutile, ce qui est acceptable s'il s'avère que ce TRI est stable sur longue période.

### III-2.2.3 Horizon économique borné arbitrairement

Une dernière possibilité, sans doute plus délicate à mettre en œuvre, consiste à comparer les différents projets sur une période assez longue, par exemple  $T = 10$  ans. Les projets à durée de vie inférieure sont supposés être renouvelés à l'expiration de leur durée de vie. Pour tenir compte des reliquats d'activité, il suffit alors de créditer les différents projets de leur valeur résiduelle à la dixième année, se plaçant ainsi dans le cas fictif d'une cessation d'activité. S'il existe un marché d'occasion, la détermination de la valeur résiduelle ne présente guère de difficultés. Dans le cas contraire, il faut déterminer cette valeur.

Plusieurs méthodes sont possibles. Citons tout d'abord une pratique qui n'a pour elle que sa simplicité d'utilisation, c'est celle qui consiste à prendre comme valeur résiduelle la définition du capital non amorti à la fin de l'horizon économique retenu, en supposant que l'on pratique un remboursement par annuités constantes (amortissement + intérêt). Par exemple, un équipement acheté 10000 et d'une durée de vie de 15 ans aura dans ces conditions une valeur résiduelle de 4171 € si le taux d'actualisation réel de 5% est utilisé<sup>1</sup>. À notre avis, deux cas de figure doivent être distingués selon qu'à l'équipement considéré on associe uniquement des flux de dépenses ou des flux de dépenses et des flux de recettes.

a) Si l'on associe au projet uniquement des flux de dépenses, la détermination de la valeur résiduelle  $V_T$  est nécessairement arbitraire. Pour lever cet arbitraire, il faut introduire un critère. Celui que l'on retiendra ici (mais d'autres sont envisageables) correspond à une volonté de maintenir constante chaque année la somme des coûts directs d'utilisation (qui, en général, croissent au cours du temps) et d'un amortissement économique (lequel n'a rien à voir avec l'amortissement fiscal), qui correspond à la diminution de valeur de déclasserment ( $V_{t-1} - V_t$ ) augmentée, le cas échéant, de la rémunération  $\alpha V_{t-1}$  du capital immobilisé<sup>2</sup>. Illustrons ceci par un exemple simplifié où l'horizon retenu est de 3 ans (au lieu de 10) et la durée de vie de l'équipement de 5 ans. L'investissement est de 1000, et la somme non

1. On a en effet:  $\frac{1,05^{15} - 1,05^{10}}{1,05^{15} - 1} \cdot 10000 = 4171$ .

2. Cette somme  $(V_{t-1} - V_t) + \alpha V_{t-1}$  est appelée «charge d'immobilisation» par Boiteux (1964, [59], chap X).

actualisée des coûts  $C_t$  de fonctionnement est de 600, ce qui conduit à une annuité de 320 et à une valeur résiduelle de 370 à la fin de l'année 3, comme le montre le [tableau 29](#).

TABLEAU 29  
Détermination de l'échéancier de valeurs résiduelles en cas d'absence de recettes et sans prise en compte de la rémunération du capital investi

	0	1	2	3	4	5	$\Sigma$
$C_t$		100	110	120	130	140	600
$C_t + (V_{t-1} - V_t)$		320	320	320	320	320	1600
$V_{t-1} - V_t$		220	210	200	190	180	1000
$V_t$	1000	780	570	370	180	0	

Si l'on introduit l'actualisation, avec un taux d'actualisation  $\alpha$  de 12%, on obtient une valeur résiduelle de 440,15 à la fin de l'année 3, comme on peut le constater sur le [tableau 30](#).

TABLEAU 30  
Détermination de l'échéancier de valeurs résiduelles en cas d'absence de recettes et avec prise en compte de la rémunération du capital investi

Table des matières

Index thématique

	0	1	2	3	4	5	$\Sigma$	FNTA
$C_t$		100	110	120	130	140	600	424,45
$x = \frac{1000 + 424,45}{\{(1 - 1,12^{-5})/0,12\}}$		395,16	395,16	395,16	395,16	395,16	1975,78	1424,45
$x - C_t = 0,12V_{t-1} + (V_{t-1} - V_t)$		295,16	285,16	275,16	265,16	255,16	1375,78	1000,00
$0,12V_{t-1}$		120,00	98,98	76,64	52,82	27,34	375,78	289,68
$V_{t-1} - V_t$		175,16	186,17	198,52	212,34	227,82	1000,00	710,32
$V_t$	1000	824,84	638,67	440,15	227,82	0,00		

**b)** Si l'on associe au projet des flux de recettes et des flux de dépenses, la valeur de déclassement est également en grande partie arbitraire. En effet (cf. [tableau 30](#)) la valeur actualisée des  $FNT_t$  positifs (différences entre les recettes d'exploitation  $R_t$  et les dépenses d'exploitation  $D_t$ ) peut s'analyser comme la valeur actualisée des charges d'immobilisation (c'est-à-dire la perte de valeur  $V_{t-1} - V_t$ , augmentée de la rémunération  $\alpha V_{t-1}$  du capital immobilisé) et de bénéfices nets d'exploitation  $B_t$ . Si l'on suppose pour simplifier que l'investissement I a lieu l'année  $t = 0$ , on a :

$$\sum_{t=1}^T FNT_t(1 + \alpha)^{-t} = \sum_{t=1}^T (R_t - D_t)(1 + \alpha)^{-t}$$

$$= \sum_{t=1}^T \{(V_{t-1} - V_t + \alpha V_{t-1}) + B_t\}(1 + \alpha)^{-t}$$

$$= I + \sum_{t=1}^T B_t(1 + \alpha)^{-t} = I + \text{FNTA}$$

Il ressort de cette formulation que, pour un taux d'actualisation  $\alpha$  et un échéancier de valeurs résiduelles donné  $V_t$ , on peut déduire sans difficulté un échéancier de bénéfices nets dont la valeur actualisée correspond au FNTA du projet. Réciproquement, si l'on connaît l'échéancier de bénéfices nets, on peut calculer l'échéancier de valeurs résiduelles. Mais comme cet échéancier de bénéfices nets est inconnu (on ne connaît que sa valeur actualisée) il est impossible, sans hypothèses complémentaires, de calculer l'échéancier des valeurs résiduelles. Une solution possible pour résoudre ce problème consiste à dire que la valeur résiduelle à la fin d'une année quelconque, l'année 3 par exemple, a la même rentabilité que l'investissement initial. Dans l'exemple donné au [tableau 31](#) le projet au TRI de 16,79% et la valeur résiduelle à la fin de la troisième année est de 347,18 car un tel placement, procurant des FNT de 200 et 240 les années suivantes, a également un TRI de 16,79%. Cette solution, qui a le mérite de la simplicité, n'en reste pas moins arbitraire.

TABLEAU 31

*Détermination de l'échéancier de valeurs résiduelles en cas de recettes, avec prise en compte de la rémunération du capital investi*

	0	1	2	3	4	5
FNT <sub>t</sub>	-1000,00	400,00	300,00	350,00	200,00	240,00
V <sub>t</sub>		767,95	596,93	347,18	205,49	

Table des matières

### III-3 La définition du programme optimal d'investissement par la programmation linéaire

En univers certain, le programme optimal d'investissements se détermine en toute rigueur en faisant appel aux techniques de programmation linéaire en nombres entiers<sup>1</sup>. Les coefficients  $c_i$  de la fonction-objectif sont les FNTA associés aux projets, et la variable  $x_i$  associée à ce coefficient est la part du projet que l'on réalise, cette part pouvant être comprise entre 0 (le projet n'est pas retenu) et 1 (le projet est retenu dans sa totalité), et ne prendre éventuellement que l'une de ces deux valeurs si le projet n'est pas fractionnable (on parle alors de variable binaire, voir [chapitre XVI, page 1135](#)). Il est possible également de donner à  $x_i$  des valeurs entières non négatives; ce sera le cas, par exemple, d'un nombre  $x_i$  de véhicules qu'une société de taxis désire acquérir, et le coefficient  $c_i$  n'est alors autre que le FNTA unitaire.

Les interdépendances sont correctement prises en compte à l'aide des contraintes. L'utilisation intelligente de ces diverses contraintes garantit que la

Index thématique

1. Cette formulation est due à Weingartner (1963, [438] et 1966, [439]). Certaines formulations fournies ci-après sont des extensions des résultats énoncés par cet auteur. Une application de cette approche a été développée par la SEMA, avec le programme CAPRI (voir Lesourne, 1973, [276], chap. XI). Les possibilités offertes de nos jours par les modélisateurs (voir le § II-1, page 1132, du [chapitre XVI](#)) mais aussi par les tableurs et leurs add-in permettant des optimisations en univers aléatoire, de modèles non linéaires de complexité moyenne (voir § II-3.3, page 190, et § II-3.4, page 196) permettent d'utiliser facilement ces approches.

sélection finale des projets par la programmation linéaire sera cohérente sur le plan technique et conforme aux objectifs de l'entreprise. Cette conformité exige bien sûr, en outre, que la « banque de projets » soumise à la sélection budgétaire n'entre pas elle-même en conflit avec ces objectifs.

Ces contraintes peuvent être classées en 2 catégories : celles qui visent les relations entre projets deux à deux (§ III-3.1) et celles relatives à l'ensemble du programme (§ III-3.2, page 218). On illustrera ces possibilités sur un exemple numérique simplifié (§ III-4, page 223).

### III-3.1 Les contraintes de dépendance réciproque des projets

Les variables représentant les projets  $i$  et  $j$  sont les variables dichotomiques  $x_i$  et  $x_j$ . Examinons par quelles contraintes se traduisent les diverses relations autres que celle d'indépendance (qui se traduit par l'absence de contrainte).

#### III-3.1.1 Exclusion

L'application des règles 1 du chapitre XVI, page 1139 conduit à la relation 25 permettant de prendre en compte l'interdiction de sélection simultanée de 2 projets et à la relation 26 qui porte cette interdiction de sélection simultanée à  $k$  projets.

$$x_i + x_j \leq 1 \quad \text{relation 25}$$

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq 1 \quad \text{relation 26}$$

C'est de cette façon que peut être traité le problème des variantes d'un même projet. Ces variantes, qui remplissent toutes la même fonction principale pour l'entreprise, se différencient soit par la technique utilisée, soit par la date d'inscription à un programme (ou par toute combinaison des deux). Si l'on a décidé qu'un investissement de remplacement (correspondant à l'une des variantes susvisées) est nécessaire « en tout état de cause », la contrainte à retenir est celle de la relation 27, qui est une application des règles 2 du chapitre XVI, page 1139.

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1 \quad \text{relation 27}$$

#### III-3.1.2 Réalisation conditionnelle

Si  $j$  ne peut être réalisé qu'à condition que  $i$  le soit, on utilise la relation 28, qui est une application des règles 3 du chapitre XVI, page 1140.

$$x_j \leq x_i \quad \text{relation 28}$$

Si  $j$  ne peut être réalisé qu'à condition que l'un quelconque des  $k$  premiers projets (exclusifs ou non) soit réalisé, la généralisation de cette contrainte passe par l'utilisation de la relation 29, qui généralise la relation précédente.

$$x_j \leq \sum_{i=1}^k x_i \quad \text{relation 29}$$

### III-3.1.3 Synergie

Si une plus-value résulte de la réalisation simultanée de  $i$  et de  $j$ , on introduit une opération  $x_k$  de coût nul et la **relation 30** (en application des règles 3 du **chapitre XVI, page 1140**, comme pour la **relation 28**) qui permet, lorsque  $i$  et  $j$  sont réalisés, de porter à 1 la valeur de  $x_k$  puisque la fonction-objectif s'accroît sans répercussion sur la contrainte de budget.

$$x_k \leq x_i \text{ et } x_k \leq x_j \quad \text{relation 30}$$

Si, à la place d'un effet de synergie, nous avons une moins-value (effet de concurrence), il faut passer par la **relation 31** car le modèle a tendance à rendre  $x_k$  aussi faible que possible, c'est-à-dire égal à 0, ce qui ne se produit que si  $x_i$  ou  $x_j$  est nul.

$$(x_k + 1) \geq x_i + x_j \quad \text{relation 31}$$

En général si la plus-value, ou la moins-value, résulte de la réalisation simultanée de  $k$  premiers projets, on crée un projet fictif  $i$ , de coût nul et on utilise :

$$k \cdot x_i \leq \sum_{j=1}^k x_j (\text{plus-value}) \quad \text{relation 32}$$

$$x_i + k - 1 \geq \sum_{j=1}^k x_j (\text{moins-value}) \quad \text{relation 33}$$

On peut ajouter que les rendements croissants ou décroissants peuvent être pris en compte «discrétionnairement» par le biais de projets à réalisation conditionnelle et synergie (cas de rendements croissants) ou effet de concurrence (cas de rendements décroissants). Un autre artifice est encore possible et consiste à introduire des projets exclusifs correspondant à autant d'hypothèses de rendement moyen.

## III-3.2 Les contraintes portant sur l'ensemble du programme

### III-3.2.1 Contraintes de trésorerie

On peut exiger que les flux nets de trésorerie résultant du choix du programme soient supérieurs à un minimum  $b_t$ , lequel peut varier chaque année  $t$ . Cette contrainte s'exprime par  $T$  inéquations correspondant aux  $T$  périodes constitutives de l'horizon économique retenu (**relation 34**). Ces flux ne sont pas actualisés.

$$\sum_{i=1}^N x_i \text{FNT}_{it} \geq b_t, \text{ avec } t = 1, \dots, T (\text{contrainte de trésorerie}) \quad \text{relation 34}$$

Pour couvrir leurs charges fixes (et donc éviter de rendre déficitaire un exercice), les entreprises sont conduites à souhaiter une certaine régularité du cumul des FNT. Ceci explique que souvent des entreprises préfèrent à des projets fortement rentables mais à rentrées irrégulières, des projets moins rentables mais à rentrées régulières. À ceci s'ajoute également le fait que les projets les plus rentables peuvent être les plus risqués et que l'arbitrage entre rentabilité et risque (cf. **page 199**) peut les rendre moins attractifs.

On peut également exiger que ces flux nets de trésorerie soient compris dans une fourchette, et c'est par ce biais que l'on traitera de préférence le problème de la définition de programmes optimaux pluriannuels. Ceci conduit aux deux remarques suivantes :

- Si l'on se place du seul point de vue de la date optimale de réalisation d'un projet, le critère du FNTA indique sans équivoque à quel programme annuel ce projet doit être inscrit. Cette année de mise en service, optimale du point de vue des variantes d'un même projet, peut être remise en cause dans la détermination optimale du programme d'investissement, pour «soulager» la contrainte de trésorerie de cette année. Le retard étant nécessairement limité dans le temps, il est nécessaire, en particulier pour des projets ne générant pas de recettes, d'exiger qu'il soit réalisé au cours de l'un des  $k$  premiers exercices en appliquant la relation 27 de la page 217  $\left( \sum_{i=1}^k x_i = 1 \right)$ .
- On a vu au § III-3.1.1, page 217, qu'il y avait intérêt à considérer les variantes d'un projet qui ne diffèrent que par leur date de réalisation, comme autant de projets exclusifs. Les FNTA de ces projets exclusifs diffèrent pour deux raisons.
  - En retardant une opération, on modifie, par le seul jeu de l'actualisation, le FNTA qui lui est associé.
  - En décalant dans le temps les échéanciers de FNT, ceux-ci peuvent changer d'amplitude sous des influences multiples (dérives de coûts, variation de la demande...).

Il faut souligner enfin que la marge de manœuvre dont on dispose au niveau budgétaire est bien plus faible qu'il ne le paraît. On a évoqué (§ III-1.2.2.3, page 209) le fait que de nombreux investissements ne génèrent aucune recette et que l'on était alors souvent dans l'obligation de choisir dans chaque sous-ensemble d'alternatives, l'une d'entre elle. Il s'ensuit qu'une partie importante du budget, celle correspondant au cumul des alternatives les moins onéreuses de chaque sous-ensemble, doit être considérée comme déjà engagée. Les degrés de liberté «résiduels» dont on dispose alors, offrent la possibilité de préférer une autre variante dans chacun des sous-ensembles et de retenir des projets à FNTA positifs (n'appartenant pas aux sous-ensembles précités). Il est intéressant de noter que le FNTA et les investissements de ces derniers projets, qui correspondent souvent à de nouvelles opportunités et sont pris dans leur intégralité, rentrent en compétition avec des variations de FNTA et d'investissements résultant d'études de bilans différentiels de variantes de projets de renouvellement d'équipement qui intègrent ou non des effets de productivité ou de capacité, et dont la rentabilité absolue – si celle-ci a un sens – peut être très différente (voir § III-2.1.1, page 210). La rationalité de la démarche est cependant assurée au niveau global car le problème posé est celui d'une allocation optimale d'un budget d'investissement et non celui de comparaison d'alternatives partielles.

### III-3.2.2 Contraintes physiques

On peut aussi se fixer le même genre de contrainte, année par année, pour toutes les ressources rares de l'entreprise. C'est ainsi que si, à certains projets, des écono-

mies de personnel importantes sont associées, on pourra introduire une limite à la décroissance des effectifs (qui tient compte des départs naturels et ce, éventuellement, par qualification).

### III-3.2.3 Remarques

Sur le plan de la mise en œuvre de la programmation linéaire, deux remarques importantes concernant la conciliation de divers points de vue, peuvent être faites.

#### III-3.2.3.1 Permutation possible du rôle de certaines contraintes et de la fonction-objectif

Les objectifs d'une entreprise sont multiples et le critère financier est loin d'être la seule préoccupation de ses dirigeants. Le pluralisme de vues peut avoir sa traduction en programmation linéaire, si les autres objectifs peuvent s'exprimer par un ensemble de seuils, pour lesquels les différents projets mis en concurrence ont des répercussions. Des préoccupations stratégiques peuvent conduire à exiger que la sélection de projets permette d'assurer, année par année, un certain potentiel minimal de production pour certains produits ou services.

Mais on peut aussi fort bien ne pas vouloir privilégier l'aspect financier, ce qui conduit alors à changer de fonction-objectif, au profit par exemple d'une fonction cherchant à maximiser le potentiel de production, dans une optique de croissance (la détermination de ce potentiel pose implicitement, au niveau de la fonction-objectif, un problème d'agrégation assez délicat).

Les préoccupations financières ne disparaîtraient pas pour autant et seraient alors intégrées en contraintes, l'entreprise désirant maximiser son potentiel de production, à condition de ne pas descendre en dessous d'une rentabilité minimale (approche connue sous le nom de *goal programming*). Ce seuil minimal, par exemple  $b_1$ , sera saturé par  $\sum a_{1j}x_j$  où  $a_{1j}$  correspond au FNTA associé au projet  $j$ . En pratique, il peut être préférable de rechercher s'il existe un noyau stable de projets lorsque l'entreprise cherche à concilier des objectifs différents.

#### III-3.2.3.2 Analyse multicritère et programmation linéaire

Ajoutons enfin que l'approche par la programmation linéaire peut partiellement se substituer aux techniques d'analyse multicritère. En effet, l'introduction des variables dichotomiques permet de hiérarchiser des projets selon un point de vue (à l'aide des relations de réalisation conditionnelle) en laissant la possibilité de considérer comme équivalents plusieurs projets se situant à un même niveau «hiérarchique». Par exemple, les projets 1 à  $k-1$  sont équivalents (un seul devant être réalisé) et préférés au projet  $k$ , mais le projet  $i$  leur est préféré. Cette hiérarchie est prise en compte par la [relation 35](#).

$$x_k \leq \sum_{j=1}^{k-1} x_j \leq x_i \quad \text{relation 35}$$

Or, à chaque point de vue, correspond une hiérarchie de choix dont l'agrégation entraîne pratiquement toujours des effets Condorcet, c'est-à-dire, en utilisant le langage des contraintes:  $x_1 < x_2$ ,  $x_2 < x_3$ ,  $x_3 < x_1$ . Mais dans notre système, les relations de hiérarchie sont prises en compte par des inégalités larges ( $\leq$ ) et non des inégalités strictes ( $<$ ) ce qui fait que si deux points de vue sont, a priori, incom-

patibles pour un ensemble de trois projets ou plus, pour lesquels des effets Condorcet se produisent, et s'il est possible par ailleurs de les réaliser tout simultanément, les inégalités larges se transforment en égalités et le programme linéaire peut intégrer cette combinaison dans l'une de ses bases.

Cela étant, vouloir faire coexister à tout prix des points de vue différents s'effectue au détriment de l'optimum et, si les points de vue exprimés sont très différents, on peut être amené à ne pas saturer l'enveloppe budgétaire. Pour ces raisons, il vaut peut-être mieux appliquer les techniques d'analyse multicritère lors de la définition de la banque de projets. Rappelons enfin que la conciliation de points de vue ne constitue pas une fin en soi et que l'art de diriger consiste, dans l'entreprise comme ailleurs, à arbitrer entre plusieurs stratégies possibles.

### III-3.2.3.3 Prise en compte du risque

La démarche décrite au § II-3.4, page 196, sur la prise en compte probabiliste du risque dans l'analyse d'un projet se transpose sans difficulté dans la recherche du programme optimal d'investissement. On illustrera cette possibilité au § III-4.2, page 226.

### III-3.2.3.4 Raisons de la faible diffusion de l'approche rigoureuse du choix du portefeuille d'investissement

Rares sont les entreprises qui procèdent à une démarche de rationalisation des choix d'investissement aussi sophistiquée que celle présentée ici. De nombreuses raisons expliquent cela. La méconnaissance de ces approches «rationnelles» et la difficulté (faible aujourd'hui) de leurs mises en œuvre ne constituent qu'une raison parmi d'autres.

La plus importante tient sans doute au fait que le problème du choix des investissements ne se pose pas de manière rationnelle une fois par an, sachant que les contraintes fiscales conduisent, dans bon nombre de pays à avoir une détermination annuelle de la capacité d'autofinancement. Le calendrier des décisions est rythmé par des besoins et des opportunités qui forcent à des prises de décisions plus fréquentes, avec des budgets d'investissement «élastiques» en fonction de ces besoins et opportunités, avec une certaine régulation de l'enveloppe d'investissement s'effectuant sur un calendrier annuel. Dans ce cadre, il n'est pas rare d'observer une absence de discussion réelle dès lors que l'on est assuré que la rentabilité des projets retenus est très élevée pour l'entreprise et le budget dégagé correspond alors aux besoins. Cette pratique est également habituelle pour des investissements de faible montant, dans le cadre d'une décentralisation de la décision opérée par des entreprises d'une certaine importance, et la mise sous tension est alors généralement complétée par une dotation budgétaire annuelle et un contrôle a posteriori. Bien évidemment, une analyse périodique (au moins annuelle) des autres projets est réalisée.

Si un certain nombre de précautions sont prises, cette pratique peut aboutir au même résultat que celui d'une mise en œuvre annuelle d'une démarche rationnelle de choix d'investissement, en permettant de mieux coller aux besoins et opportunités. Cela étant, plusieurs remarques doivent être faites :

- On a évoqué (§ III-2.1.3, page 211) le fait qu'il n'est pas possible d'associer des recettes à certains investissements, la pratique du bilan différentiel

conduit alors à choisir l'alternative la plus intéressante, mais la consommation budgétaire de l'alternative retenue porte sur la totalité du montant de l'alternative et non sur l'investissement différentiel.

- On a évoqué (§ III-2.1.1, page 210) le fait que la direction de l'entreprise décide de rester sur des activités peu rentables, voire non rentables. La pratique du bilan différentiel ne doit pas conduire, là aussi, à une absence de réflexion stratégique sur le maintien de telles activités.
- L'analyse périodique du portefeuille «résiduel» de projets peut s'inspirer des approches décrites ici, d'autant plus qu'elles autorisent une prise en compte du risque (§ III-3.2.3.3, page 221) et ne remettent pas en cause des décisions stratégiques<sup>1</sup>.
- Le cadre théorique de référence offert par les démarches décrites ici permet d'évaluer les risques que l'on accepte de courir en utilisant des méthodes empiriques et, accessoirement, peut orienter l'empirisme raisonné à mettre en œuvre.

TABLEAU 32  
Échéancier du portefeuille de projets

Projets	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	Taux de rentabilité interne	
								sans réinvestissement	avec réinvestissement <sup>1</sup>
A	-000	300	600	400	0	0	0	13,71 %	13,85 %
B	-1 100	300	600	300	450	0	0	17,99 %	16,76 %
C <sup>2</sup>	-800	200	300	100	300	100	100	11,35 %	11,35 %
D <sup>3</sup>	0	50	60	70	0	0	0	-	-
E	-600	150	100	300	300	0	0	13,20 %	13,45 %
F <sup>4</sup>	-2000	800	600	500	800	400	0	18,02 %	17,41 %
G <sup>5</sup>	0	-50	-70	-30	-10	-10	0	-	-
H <sup>6</sup>	-1 300	550	600	800	0	0	0	21,74 %	18,16 %
I	-900	300	600	200	200	0	0	18,63 %	17,09 %
J	-1 700	800	600	700	0	0	0	11,68 %	12,91 %
K	-2 300	1 200	600	140	300	400	300	10,29 %	10,29 %

1. au taux de 14% (voir § III-2.2.2, page 213); dans ces conditions, il convient de retrancher au dernier FNT (par exemple, pour le projet E, 300 pour  $t = 4 = \tau$ ), le montant de l'investissement (ce qui donne ici - 300) et d'ajouter à la dernière période le montant de l'investissement capitalisés entre  $\tau$  et  $t = 7$  (ce qui donne ici  $600 \times 1,05^2 = 779,76$ )

2. C ne peut être choisi que si B a déjà été sélectionné (voir § III-3.1.2, page 217).

3. D est un bonus associé à la réalisation simultanée de A et B (voir § III-3.1.3, page 218, en particulier la relation 32).

4. F et B sont exclusifs (voir § III-3.1.1, page 217).

5. G est un malus associé à la réalisation simultanée de E et F (voir § III-3.1.3, page 218, en particulier la relation 33).

6. C ne peut être choisi que si B a déjà été sélectionné (voir § III-3.1.2, page 217).

1. Puisque choix portant alors sur des variantes, dont une est obligatoirement prise (cf relation 27 de la page 217).

### III-4 Exemples d'application de la démarche de détermination du portefeuille optimal d'investissement

Les coefficients de la fonction-objectif sont, nous l'avons dit, les FNTA associés aux projets. L'exemple de la [page 187](#) illustre le calcul du FNTA d'un projet, avec les analyses de sensibilité en univers certain puis en univers aléatoire. Nous allons montrer concrètement, sur un exemple numérique simplifié, comment sélectionner des projets d'investissement dans un ensemble de projets-candidats, en traitant ce problème, en univers certain et en univers aléatoire, à travers les approches basées sur l'actualisation.

Dans cet exemple (voir [tableau 32, page 222](#)):

- on a tenu compte des contraintes de dépendance réciproque des projets (voir [§ III-3.1, page 217](#));
- on a tenu compte des contraintes portant sur l'ensemble du programme (voir [§ III-3.2, page 218](#)); ici on n'a retenu que la contrainte budgétaire<sup>1</sup> (d'une dépense d'investissement maximale de 7000);
- on a utilisé successivement deux critères :
  - tout d'abord, la maximisation du FNTA du portefeuille retenu, pour un taux d'actualisation imposé (5%) et avec le TRI du projet marginal,
  - ensuite, la maximisation du TRI (taux de rentabilité interne) du portefeuille retenu (voir [page 209](#));
- les projets retenus se caractérisant par des durées de vie inégales, le principe d'un réinvestissement à la fin des projets, sur un horizon borné correspondant à celui du projet le plus long, dans un projet «moyen» ([§ III-2.2.2, page 213](#)) de rentabilité égale :
  - à 14%, si l'optimisation porte sur le critère du FNTA du portefeuille retenu, que l'on utilise un taux d'actualisation de 5% ou que l'on recherche le taux d'actualisation de référence;
  - au TRI, si l'optimisation porte sur le critère est celui de la maximisation du TRI du portefeuille retenu.

Table des  
matières

Index  
thématique

Examinons maintenant les solutions optimales trouvées pour les différentes formulations retenues. On utilisera ici le terme de programmation mathématique, plus général que celui de la programmation linéaire, parce que certaines formulations ne sont pas linéaires du fait que l'une des variables utilisées (le taux d'actualisation) intervient dans la détermination des coefficients de la fonction-objectif. Pour cette raison, nous avons utilisé un add-in d'Excel qui utilise un algorithme génétique, pour rechercher la solution du problème posé<sup>2</sup>. Tout ceci ne doit pas faire oublier (voir [§ III-1.2.2.3, page 209](#)) que l'approche du bilan différentiel conduit à considérer qu'une partie du budget d'investissement est consommée, les choix portant sur variations d'investissement.

1. On a plutôt intérêt à définir une fourchette de budget d'investissement pour tenir compte du caractère discontinu de la demande de capitaux de projets non divisibles. Cette fourchette doit correspondre à ce que l'entreprise souhaite investir, avec un rendement maximal du capital investi (rendement exprimé sous forme de FNTA ou de TRI).

### III-4.1 Choix du programme optimal en univers certain

#### III-4.1.1 Programmation mathématique et taux d'actualisation prédéfini

La formulation du problème et la solution optimale trouvée sont décrites dans la feuille Excel de la [figure 57 de la page 225](#). Comme indiqué au début du [§ III, page 199](#), à chaque projet correspond une variable binaire  $x_i$  (cellules B4 à B14) et, dans la fonction-objectif  $z = \sum c_i x_i$ , les FNTA de ces projets (cellules D4 à D14) sont les coefficients  $c_i$  associés ces variables binaires; les cellules C4 à C14 correspondent aux  $c_i x_i$  et le FNTA  $z$  du programme d'investissement est dans la cellule C15, qui est la somme des cellules C4 à C14. Les contraintes soumises au *solveur* génétique ont la forme des contraintes décrites dans les cellules jaunes de la feuille; s'y ajoute une contrainte forçant les variables  $x_i$  à ne pouvoir prendre que la valeur 0 ou la valeur 1. Le portefeuille de projets «projets A, B, D, E, H, I et J» maximise le FNTA à 5% avec un taux de rentabilité des réinvestissements de 14%, avec un FNTA maximum égal à 3 123 et une consommation de budget égale à 6 600.

#### III-4.1.2 Programmation linéaire et mathématique et taux d'actualisation égal au TRI du projet marginal

La détermination du taux d'actualisation de référence suivant la procédure décrite à la [page 208](#), avec un taux de rentabilité des réinvestissements de 14%, conduit au taux égal à 10,28%<sup>1</sup>, correspondant au TRI du projet J, projet marginal. Dans cette formulation, on utilise au mieux le budget parce que les FNTA des projets sont d'autant plus élevés que le taux d'actualisation est faible. La solution optimale consiste alors à sélectionner les projets A, B, D, E, H et K, ce qui conduit à une consommation budgétaire de 6 300 et un FNTA de 995 (non comparable au précédent, le taux d'actualisation n'étant pas le même). On constate donc un choix diffère de celui réalisé avec le taux de 5%.

2. *Note de la page précédente.* Cet *add-in* est Evolver de la société Palisade ([www.palisade.com](http://www.palisade.com) d'où peuvent être téléchargées des versions complètes d'évaluation, utilisables sur quelques semaines). Comme les grands codes de programmation linéaire ou non linéaire, il offre le choix entre plusieurs algorithmes spécialisés dans des classes de problèmes et autorise un paramétrage de ces algorithmes. Par ailleurs dans des problèmes d'une certaine taille, il ne garantit pas d'avantage l'obtention de l'optimum et le choix de la solution initiale utilisée pour amorcer les calculs s'avère souvent importante dans le processus d'obtention de l'optimum. L'utilisation de cet *add-in* est proche de celle retenue par le *solveur* d'Excel pour définir un problème de programmation linéaire (voir [chapitre XVI, § I-4.4, page 1129](#) et la [figure 268, page 1130](#)). Les formulations retenues s'appuient sur des variables binaires, selon la logique décrite dans les zones jaunes de la [figure 57](#) mais l'utilisation directe de conditions logiques appropriées formulées avec les fonctions du tableur aurait conduit au même résultat.

1. Dans ce problème, la difficulté est de forcer le taux d'actualisation, à utiliser pour établir le programme d'investissement, à être égal au taux du projet marginal de ce programme: le taux d'actualisation est alors défini comme étant  $\text{Min}(x_i \text{TRI}_i^* + (1 - x_i) \Gamma)$  où  $\text{TRI}_i^*$  est le TRI du projet  $i$  avec réinvestissement et où  $\Gamma$  est une constante supérieure à n'importe quel TRI. Pour obtenir ce résultat, on a mis dans les cellules N4 à N14, le TRI du projet si celui est retenu et  $\Gamma = 200\%$ , dans le cas contraire (par exemple, dans la cellule N4, ceci conduit à l'instruction «=B3\*M3 + 2\*(1-B3)» mais on aurait obtenu le même résultat avec «=SI(B3; B3\*M3; 2)»). Il suffit ensuite de déterminer (dans la cellule N15) le minimum des cellules N4 à N14. Enfin, dans la cellule B1 qui contient le taux d'actualisation utilisé pour calculer les FNTA $_i$ , on met la valeur minimale trouvée (cellule N15) diminué d'une valeur très faible (ici 0,001%) pour permettre au projet marginal d'avoir un FNTA positif et donc d'être retenu dans le programme.

FIGURE 57

Optimisation du FNTA au taux d'actualisation de 5% et réinvestissement à 14%

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Taux d'actualisation 5%		Taux de réinvestissement 14%									
2	PROJET	Variable binaire	Investissement	FNTA réalisé	FNTA	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	t = 6
3	A	1	-1000	417	417	-1000	300	600	-600	0	0	1482
4	B	1	-1100	521	521	-1100	300	600	300	-650	0	1430
5	C (possible si B sélectionné)	0	0	0	149	-800	200	300	100	300	100	100
6	D (synergie si A ET B)	1	0	183	183	0	50	60	70	0	0	0
7	E	1	-600	227,770	228	-600	150	100	300	-300	0	780
8	F (exclusif de B)	0	0	0	844	-2000	800	600	500	800	-1600	2280
9	G (synergie - si E et F)	0	0	0	-153	0	-50	-70	-30	-10	-10	0
10	H (possible si E sélectionné)	1	-1300	773	773	-1300	550	600	-500	0	0	1928
11	I	1	-900	400	400	-900	300	600	200	-700	0	1170
12	J	1	-1700	622	622	-1700	800	600	-1000	0	0	2519
13	K	0	0	0	292	-2300	1200	600	140	300	400	300
14	TOTAL		-6600	3123								
15	CONTRAINTES											
16	C si A et B (synergie +) $B7^*2 \leq B4 + B5$											
17	C possible si B choisi $B6 \leq B5$											
18	B et F exclusifs $B9 + B5 \leq 1$											
19	G (synergie - si E et F) $B10 + 1 \geq B7 + B8$											
20	H possible si E choisi $B11 \leq B3$											
21	Budget $C11 \geq -7000$											

Table des matières

### III-4.1.3 Programmation linéaire et critère du TRI maximal du budget investi

Index thématique

Ici le taux de réinvestissement retenu est égal au TRI du programme d'investissement retenu. Dans ce problème, ce n'est plus la valeur de la cellule C15 qu'il faut maximiser mais celle de la cellule B2, en forçant la cellule C15 à prendre une valeur nulle (en pratique, on a forcé cette cellule à prendre une valeur comprise entre - 1 et + 1). Il faut aussi tenir compte du fait qu'une solution triviale consiste à réduire le programme d'investissement au seul projet à plus fort TRI. Si l'on veut dépenser en investissement un montant minimal, il faut alors modifier la contrainte budgétaire (ici on a voulu dépenser au moins 5 500 et, au plus, 7 000); on peut alors *optimiser le rendement du budget investi*. La solution maximisant le TRI (avec un taux de rentabilité du réinvestissement égal à ce TRI) conduit à sélectionner les projets A, B, C D, E, H et I, ce qui conduit à un TRI maximum égal à 17,71% et à une consommation de budget égale à 5 700<sup>1</sup> (figure 59, page 227).

1. Le programme «A, B, D, E, I et K», qui est le second meilleur choix, conduit à une moins bonne saturation du budget disponible (5900) avec une détérioration du TRI du programme (15,05%). Le troisième meilleur choix «B, C, E, H, I et K» consomme un budget de 7000, pour un TRI de 14,90%. Ceci illustre le rendement marginal décroissant des sommes investies et la nécessité de forcer le budget à consommer à un montant suffisamment élevé pour être en mesure de pouvoir dépenser la somme que l'on souhaite investir, au meilleur rendement.

**FIGURE 58**  
*Optimisation du FNTA au taux d'actualisation égal au TRI du projet marginal et réinvestissement à 14%*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Taux d'actual.	10,28%	Taux de réinvestissement		14%									
2	PROJET	Variab e binaire	Inv estis se ment	FNTA réalisé	FNTA	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	t = 6	TRI	Calcul TRI mini
3	A	1	-1000	141	141	-1000	300	600	-600	0	0	1481,5	13,85%	13,85%
4	B	1	-1100	244	244	-1100	300	600	300	-650	0	1429,6	16,76%	16,76%
5	C	0	0	0	22	-800	200	300	100	300	100	100,0	11,35%	200,00%
6	D	1	0	147	147	0	50	60	70	0	0	0,0		200,00%
7	E	1	-600	72	72	-600	150	100	300	-300	0	779,8	13,45%	13,45%
8	F	0	0	0	419	-2000	800	600	500	800	-1600	2280,0	17,41%	200,00%
9	G	0	0	0	-138	0	-50	-70	-30	-10	-10	0,0		200,00%
10	H	1	-1300	390	390	-1300	550	600	-500	0	0	1926,0	18,16%	18,16%
11	I	0	0	0	191	-900	300	600	200	-700	0	1169,6	17,09%	200,00%
12	J	0	0	0,00	173	-1700	800	600	-1000	0	0	2518,6	12,91%	200,00%
13	K	1	-2300	0	0	-2300	1200	600	140	300	400	300,0	10,29%	10,29%
14	TOTAL		-6300	995										10,29%
15	CONTRAINTES													
16	C si A et B (synergie +)		\$B\$7*2 <= \$B\$4 + \$B\$5											
17	C possible si B choisi		\$B\$6 <= \$B\$5											
18	B et F exclusifs		\$B\$9 + \$B\$5 <= 1											
19	G (synergie - si E et F)		\$B\$10 + 1 >= \$B\$7 + \$B\$8											
20	H possible si E choisi		\$B\$11 <= \$B\$8											
21	Budget		-\$C\$11 <= 7000											

Table des  
matières

### III-4.2 Choix du programme optimal en univers aléatoire

La démarche décrite au § II-3.4, page 196, est transposable sans difficulté pour résoudre le problème posé en univers aléatoire<sup>1</sup>. Il faut simplement plus de temps de calcul et une meilleure expertise dans le choix des méthodes utilisables et la détermination d'une solution initiale respectant les contraintes. Le **tableau 33** adapte au cas aléatoire les données du **tableau 32 de la page 222**. Une distribution triangulaire a été systématiquement utilisée avec un mode correspondant au flux de trésorerie correspondant du **tableau 32**.

Avec le taux d'actualisation de 5% et le taux de réinvestissement de 14%, on retrouve la même solution qu'en univers certain<sup>2</sup> mais on dispose maintenant en plus de la distribution de probabilité du FNTA du programme. Celle-ci est approximativement symétrique, son espérance mathématique est 2978, son écart-type est 137 et ses fractiles à 5% et 95% sont respectivement 2748 et 3198.

La recherche en univers aléatoire du programme d'investissement qui maximise le rendement d'une dépense budgétaire comprise également entre 5500 et 7000

1. Les distributions utilisées dans cet exemple sont indépendantes mais l'add-in utilisé permet sans difficulté d'introduire des corrélations entre les variables aléatoires (ce qui peut permettre, dans certains cas de traiter de façon plus judicieuse les effets de synergie entre projets).

2. Ceci s'explique par le caractère faiblement dissymétrique des distributions retenues.

Index  
thématique

FIGURE 59

Optimisation du TRI avec consommation budgétaire définie par une fourchette

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Taux d'actualisation	17,71%	Taux de réinvestissement 17,71%									
2	PROJET	Variable binaire	Investissement	FNTA réalisé	FNTA	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6
3	A	1	-1000	-66,8	-67	-1000	300	600	400	0	0	0
4	B	1	-1100	6,2	6	-1100	300	600	300	450	0	0
5	C (possible si B sélectionné)	1	-800	-114,1	-114	-800	200	300	100	300	100	100
6	D (synergie si A ET B)	1	0	128,7	129	0	50	60	70	0	0	0
7	E	1	-600	-60,2	-60	-600	150	100	300	300	0	0
8	F (exclusif de E)	0	0	0,0	13	-2000	300	600	500	300	400	0
9	G (synergie - si E et F)	0	0	0,0	-121	0	-50	-70	-30	-10	-10	0
10	H (possible si E sélectionné)	1	-1300	90,8	91	-1300	550	600	300	0	0	0
11	I	1	-900	14,7	15	-900	300	600	200	200	0	0
12	J	0	0	0,0	-158	-1700	300	600	700	0	0	0
13	K	0	0	0,0	-316	-2300	1200	600	140	300	400	300
14	TOTAL		-5700	-0,7								
15	CONSTRAINTES											
16	C si A et B (synergie +)	$\$B\$2 \leq \$B\$4 + \$B\$3$										
17	C possible si B choisi	$\$B\$3 \leq \$B\$2$										
18	B et F exclusifs	$\$B\$2 + \$B\$8 \leq 1$										
19	G (synergie - si E et F)	$\$B\$10 + 1 \geq \$B\$7 + \$B\$8$										
20	H possible si E choisi	$\$B\$11 \leq \$B\$7$										
21	Budget	$-7000 \leq \$C\$11 \leq -65000$										
22	FNTA	$1 \leq \$C\$15 \leq 1$										

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 33

Échéancier du portefeuille de projets<sup>1</sup> en univers aléatoire : paramètres des distributions triangulaires retenues (Minimum / Mode / Maximum)

Projets	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	t = 6
A	270 / 300 / 330	540 / 600 / 660	360 / 400 / 440			
B	255 / 300 / 360	510 / 600 / 720	255 / 300 / 360	382,5 / 450 / 540		
C	180 / 200 / 220	270 / 300 / 330	90 / 100 / 110	270 / 300 / 330	90 / 100 / 110	90 / 100 / 110
D	45 / 50 / 57,5	54 / 60 / 69	63 / 70 / 80,5			
E	120 / 150 / 165	80 / 100 / 110	240 / 300 / 330	240 / 300 / 330		
F	600 / 800 / 1040	450 / 600 / 780	375 / 500 / 650	600 / 800 / 1040	300 / 400 / 520	
G	-45 / -50 / -60	-63 / -70 / -84	-27 / -30 / -36	-9 / -10 / -12	-9 / -10 / -12	
H	440 / 550 / 605	480 / 600 / 660	640 / 800 / 880			
I	270 / 300 / 360	540 / 600 / 720	180 / 200 / 240	180 / 200 / 240		
J	560 / 800 / 880	420 / 600 / 660	490 / 700 / 770			
K	1080 / 1200 / 1440	540 / 600 / 720	126 / 140 / 168	270 / 300 / 360	360 / 400 / 480	270 / 300 / 360

1. Les relations de dépendance réciproques de ces projets sont définies au tableau 32, page 222.

conduit également au même résultat qu'en univers aléatoire, avec un TRI moyen de 17,58 %, un écart-type de 0,7 %. De surcroît, on voit qu'il y a environ 30 % pour le TRI dépasse 18 % et 1,6 % pour qu'il soit inférieur à 16 %. Des analyses de sensibilité du type de celles conduites à la [page 193](#) peuvent être conduites.

## SECTION IV QUELQUES COMPOSANTES TECHNICO-ÉCONOMIQUES DE LA RENTABILITÉ DES PROJETS D'INVESTISSEMENT

Les projets d'investissement ont pour objectif de transformer le système productif pour l'adapter à l'évolution des besoins et assurer le maintien de la performance technique et économique de l'entreprise. L'éclairage économique de plusieurs problèmes de nature technique ou organisationnel a déjà été introduit.

- On a évoqué au [§ II-3.4, page 196](#), l'analyse économique du changement de filière de production.
- L'appel aux techniques de simulation ([§ I-2.1, page 148](#)) s'avère indispensable pour mettre en place une organisation pertinente lorsque l'introduction d'équipements modifie de manière sensible «l'équilibre» des caractéristiques techniques des postes de travail. Il s'agit alors d'une réflexion complémentaire sur la nécessaire adaptation des compétences, procédures de conduite et maintenance du système productif étudié mais aussi, dans certains cas de logistique de circulation de flux entre les postes de travail (certains logiciels de simulation offrant dans ce domaine des moyens d'investigation particulièrement puissants).

D'autres problèmes se posent souvent dans la mouvance des dossiers d'investissement. Nous en aborderons ici deux : celui de l'implantation des centres de production, au sens large, ([§ IV-1](#)) et celui de la détermination de la durée de vie optimale de certains équipements ([§ IV-2, page 234](#)). Pour mémoire, un dernier problème ne doit pas être oublié, même si nous ne l'aborderons pas explicitement ici : certains investissements s'accompagnent d'une modification du système d'information dont les incidences doivent être correctement évaluées.

### IV-1 L'implantation des centres de production

Le problème de l'implantation des centres de production (pris au sens large) a une double dimension :

- Une dimension spatiale tout d'abord, car il s'agit d'une part de savoir où localiser une usine (ou un centre de services), et d'autre part où localiser les différents postes de travail dans cette usine, mais nous ne nous intéresserons ici qu'à ce dernier aspect de la question<sup>1</sup>.
- Une dimension organisationnelle, ensuite, car la réponse au problème de la localisation des postes de travail dépend étroitement du mode d'organisation retenu : organisation en ateliers spécialisés (voir [chapitre I, § I-2.2.2, page](#)

1. En effet si les techniques de localisation optimale d'une usine sont relativement développées (voir, en particulier, [chapitre VIII, § I-2.2.2, page 552](#)), il est bien rare que dans la pratique les choix soient fondés sur ce type de rationalité, la politique jouant un rôle primordial dans la localisation de nouvelles usines de grands groupes, et les facteurs d'une rationalité extra-économique (rôle des épouses des cadres susceptibles de déménager par exemple), jouant un rôle non moins important dans la localisation d'unités nouvelles d'entreprises moyennes.

51), organisation en ligne de production ou d'assemblage (voir [chapitre I, § I-2.2.3, page 53](#) et le [chapitre IX, page 589](#)), organisation liée à une mise en œuvre de la technologie de groupe (voir [chapitre I, § I-2.2.5.1, page 59](#)) ou organisation combinant plusieurs de ces formes.

Dans une organisation en ateliers spécialisés, se posent principalement le problème de l'ordonnancement (que nous examinerons au [chapitre V, page 359](#)) et celui de la localisation des ateliers, dans une optique de minimisation des coûts de manutention. Ce dernier problème fera l'objet du [§ IV-1.1](#). Dans une organisation en ligne, ce n'est pas tant le problème de la localisation des postes que celui de leurs contenus en travail qui se pose, avec la prise en compte du souci d'équilibrer les charges de travail sur les différents postes, pour optimiser leur utilisation globale, et de celui de permettre une certaine variété de la production et flexibilité dans les niveaux de production; ces problèmes seront abordés au [chapitre IX](#) (et le problème d'équilibrage d'une ligne sera abordé, en particulier, au [§ I-1.1, page 592](#)).

### IV-1.1 La localisation optimale des ateliers spécialisés

La localisation respective des centres de production a une incidence sur le coût des flux circulant entre ces différents centres de production. Ces centres de production peuvent être aussi bien des bureaux d'un service administratif que des ateliers spécialisés. Dans le premier cas, les flux sont des flux d'informations (documents divers) mais également des déplacements de personnes appelées à travailler ensemble de façon plus ou moins régulière. Dans le second cas, les flux qui circulent entre centres de production sont avant tout des flux de matières premières et de produits semi-finis ou finis. Le coût de la manutention comprend les amortissements des engins de manutention qui vont jusqu'aux ponts roulants, les dépenses d'énergie, les salaires de l'équipe de manutentionnaires, et il faut y ajouter le coût de constitution de stocks-tampons complémentaires dans certains cas. Il est souvent possible de diminuer l'importance de ces flux entre centres de production, et ce faisant de diminuer les dépenses de gestion, en améliorant la localisation de ces centres de production.

Nous examinerons dans un [§ IV-1.1.1](#) la complexité de ce problème de localisation en supposant, pour simplifier la présentation du problème, que les centres de production sont d'importance voisine du point de vue de leur encombrement au sol, et qu'aucune contrainte ne pèse sur leur localisation; puis, dans un second paragraphe ([§ IV-1.1.2, page 233](#)), nous lèverons ces hypothèses, pour aborder les problèmes tels qu'ils se présentent dans la réalité.

#### IV-1.1.1 Présentation simplifiée du problème

##### IV-1.1.1.1 Exemple introductif

**Usinec** fabrique du matériel électrique et comporte 5 ateliers spécialisés d'égale importance: l'atelier 1 qui regroupe les tours, l'atelier 2 qui regroupe les presses, l'atelier 3 qui fabrique les moteurs, l'atelier 4 qui s'occupe de l'assemblage, de la finition et de l'expédition et l'atelier 5 qui est le magasin des pièces détachées et matières premières. La manutention entre ateliers s'effectue le plus souvent par container, aussi l'unité de trafic que l'on retiendra est le container, mais on aurait aussi bien pu retenir une autre unité comme la tonne, ou encore une unité fictive

définie en étroite relation avec les coûts de manutention (unité de chargement d'un engin de manutention par exemple).

Cinq localisations sont possibles, les différents emplacements ayant tous la même surface. Les distances (en mètres) entre ces emplacements sont données dans le premier des tableaux 34 où l'on peut constater une symétrie par rapport à la diagonale, c'est-à-dire que la distance  $d_{ij}$  pour aller de  $i$  en  $j$  est la même que pour se rendre de  $j$  en  $i$  (ce qui n'est pas toujours vrai : les emplacements peuvent se situer par exemple à des niveaux différents, ce qui permet d'utiliser la gravité).

La production s'effectuant en petite série, les flux de transport entre ateliers varient d'un article à l'autre. Sur une période représentative, les échanges entre centres de production (en centaines de containers) sont donnés dans le second des tableaux 34. La diagonale du tableau est nulle c'est-à-dire que, par convention, on ne s'occupe pas de la manutention au sein d'un atelier spécialisé (ou plus exactement que celle-ci n'affectera pas la localisation respective des différents ateliers) On peut noter en outre que ces flux ne sont pas symétriques.

Supposons que les ateliers 1 à 5 sont respectivement dans les emplacements I à V, et que le coût de manutention est proportionnel au trafic  $t_{ij}$  et à la distance  $d_{ij}$ , ce qui fait que le coût minimal de manutention est obtenu par l'affectation qui minimise  $\sum_i \sum_j t_{ij} d_{ij}$ . Le coût de manutention de la solution actuelle est donc de 9311 (= somme des valeurs du dernier tableau 34):

TABLEAU 34  
Données du problème d'implantation des ateliers

Distance  $d_{ij}$  entre zones  
d'implantation

	I	II	III	IV	V
I	0	25	22	45	47
II	25	0	18	21	23
III	22	18	0	24	20
IV	45	21	24	0	22
V	47	23	20	22	0

Trafic  $t_{ij}$  entre ateliers

	1	2	3	4	5
1	0	20	50	10	5
2	30	0	15	20	5
3	5	10	0	25	15
4	1	2	1	0	10
5	40	50	35	10	0

$t_{ij} \cdot d_{ij}$

	1 - I	2 - II	3 - III	4 - IV	5 - V
1 - I	0	500	1100	450	235
2 - II	750	0	270	420	115
3 - III	110	180	0	600	300
4 - IV	45	42	24	0	220
5 - V	1880	1150	700	220	0

#### IV-1.1.1.2 Recherche d'une meilleure localisation

Même dans ce cas très simple, où les ateliers occupent tous la même superficie et où aucune contrainte particulière ne pèse sur les affectations des ateliers, le problème posé est redoutable puisqu'il y a  $5! = 120$  affectations différentes possibles. Que dire alors de problèmes réels où le découpage est plus fin et où l'on trouve facilement 30 centres de production, ce qui correspond à  $30! = 2,65 \times 10^{32}$  affectations possibles !

Une approche efficace du problème a été mise au point en 1963 par Armour et Buffa<sup>1</sup> qui est connue sous le nom de CRAFT (*Computerized Relative Allocation of Facilities Technique*) et dont le programme est largement utilisé, d'autant plus qu'il permet de résoudre les problèmes beaucoup plus complexes que nous verrons au § IV-1.1.2, page 233. L'algorithme cherche à améliorer progressivement une solution initiale, et à s'arrêter lorsqu'aucune amélioration supplémentaire ne peut plus être obtenue. La procédure suivie est très schématiquement la suivante :

- **Étape 1 :** On recherche l'amélioration de la dernière solution retenue en recherchant la meilleure permutation de 2 centres de production, et l'on retiendra la permutation qui diminue le plus fortement les coûts de manutention. Il faut donc explorer la variation de coût des  $C_n^2 = n(n-1)/2$  permutations possibles de 2 centres différents de production pris dans un ensemble initial de n centres (= nombre de combinaisons de 2 éléments pris dans un ensemble de n éléments pour reprendre la terminologie du dénombrement des problèmes combinatoires).
- **Étape 2 :** Revenir à l'étape 1 avec la nouvelle solution comme solution de référence. Si aucune nouvelle diminution de coût de manutention n'est possible, passer à l'étape 3 en conservant la solution de référence.
- **Étape 3 :** La solution retenue est la solution de référence de la dernière itération.

Les résultats de l'application de cet algorithme sont consignés dans le **tableau 35 de la page 232**. Ce tableau résumé amène les commentaires suivants - la solution finalement retenue consiste à affecter aux centres I à V les ateliers dans l'ordre 4, 5, 3, 2 et 1, le coût total de manutention étant de 8469 par période de référence, contre 9311 initialement (d'où une économie de 9%). En explicitant toutes les affectations possibles, on montre que cette solution est optimale, mais d'une manière générale, cet algorithme ne garantit pas l'optimalité de la solution trouvée.

- Cette solution a été obtenue après le calcul du coût de 40 solutions possibles (non toutes différentes), ce qui représente un gain de calcul substantiel par rapport aux 120 solutions théoriquement réalisables. Ces 40 solutions correspondent à 10 permutations de 2 des ateliers pour 4 solutions de référence, ces solutions de référence sont encadrées dans le tableau de synthèse de calcul, et sont également repérées par un astérisque (permutation à coût minimal et inférieur à celui de la solution de référence nouvelle solution de référence).

1. Armour et Buffa (1963, [21]), p. 294-309.

TABLEAU 35  
Recherche de l'implantation optimale avec CRAFT

Permutation		Affectation des ateliers aux centres					Coût de manutention	
Numéro	Couple	I	II	III	IV	V		
Itération 1	Solution initiale	1	2	3	4	5	9311	
	1	1 ↔ 2	2	1	3	4	5	9695
	2	1 ↔ 3	3	2	1	4	5	9586
	3	1 ↔ 4	4	2	3	1	5	8632
	4	1 ↔ 5	5	2	3	4	1	9518
	5	2 ↔ 3	1	3	2	4	5	9299
	6	2 ↔ 4	1	4	3	2	5	10050
	7	2 ↔ 5	1	5	3	4	2	9373
	8	3 ↔ 4	1	2	4	3	5	10392
	9	3 ↔ 5	1	2	5	4	3	9399
10	4 ↔ 5	1	2	3	4	5	9273	
Itération 2	Solution initiale	4	2	3	1	5	8632	
	1	1 ↔ 2	4	1	3	2	5	8662
	2	1 ↔ 3	4	2	1	3	5	8912
	3	1 ↔ 4	1	2	3	4	5	9311
	4	1 ↔ 5	4	2	3	5	1	8584
	5	2 ↔ 3	4	3	2	1	5	8614
	6	2 ↔ 4	2	4	3	1	5	10404
	7	2 ↔ 5	4	5	3	1	2	8631
	8	3 ↔ 4	3	2	4	1	5	10387
	9	3 ↔ 5	4	2	5	1	3	8612
10	4 ↔ 5	5	2	3	1	4	9528	
Itération 3	Solution initiale	4	2	3	5	1	8584	
	1	1 ↔ 2	4	1	3	5	2	8776
	2	1 ↔ 3	4	2	1	5	3	8824
	3	1 ↔ 4	1	2	3	5	4	9273
	4	1 ↔ 5	4	2	3	1	5	8632
	5	2 ↔ 3	4	3	2	5	1	8626
	6	2 ↔ 4	2	4	3	5	1	10356
	7	2 ↔ 5	4	5	3	2	1	8469
	8	3 ↔ 4	3	2	4	5	1	10423
	9	3 ↔ 5	4	2	5	3	1	8652
10	4 ↔ 5	5	2	3	4	1	9528	
Itération 4	Solution initiale	4	5	3	2	1	8469	
	1	1 ↔ 2	4	5	3	1	2	8631
	2	1 ↔ 3	4	5	1	2	3	8919
	3	1 ↔ 4	1	5	3	2	4	9221
	4	1 ↔ 5	4	1	3	2	5	8662
	5	2 ↔ 3	4	5	2	3	1	8556
	6	2 ↔ 4	2	5	3	4	1	9586
	7	2 ↔ 5	4	2	3	5	1	8584
	8	3 ↔ 4	3	5	4	2	1	9930
	9	3 ↔ 5	4	3	5	2	1	8607
10	4 ↔ 5	5	4	3	2	1	10173	

Table des matières

Index thématique

- Le coût de manutention est mentionné de préférence à la variation de coût par rapport au coût de la solution de référence, mais en réalité c'est cette varia-

tion de coût que l'on a intérêt à calculer pour minimiser les calculs (il est clair, en comparant les résultats des deux premières solutions de référence qui diffèrent par la permutation des ateliers 1 et 4, que les  $d_{ij}$  et  $d_{ji}$  ne changent pas dès lors que  $i$  et  $j$  sont différents de 1 et 4).

#### IV-1.1.2 Présentation d'un problème réel

Dans la pratique, le problème est beaucoup plus complexe. La raison principale est qu'il est bien rare que les différents centres de production occupent la même surface au sol. Ceci fait que la recherche d'une solution doit nécessairement tenir compte des différences de « consommation d'espace » des centres de production. Accessoirement, la localisation de certains centres peut être sujette à des restrictions (proximité d'une cheminée d'aération par exemple), et la « forme » de certains ateliers peut être imposée; en outre, la configuration du local n'est soumise à aucune restriction.

Ces différentes contraintes peuvent être prises en compte par CRAFT. Reprenons, pour illustrer ce point, l'exemple que Buffa, Armour et Vollmann ont donné<sup>1</sup>, et qui traite d'un problème d'amélioration de l'implantation de 22 ateliers (repérés par les lettres A à V, les ateliers U et V ayant une localisation imposée, dans une usine de l'industrie aéronautique). On ne reproduira pas ici les données de base du problème (matrice des flux de transport entre ateliers, matrice des coûts de transport entre ateliers pour une distance unitaire donnée, surface requise pour chacun de ces ateliers), pour ne donner que la configuration initiale (à gauche du [tableau 36 de la page 234](#)) et la configuration finale (à droite du [tableau 36](#)). La nouvelle solution diminue les coûts de manutention de 39%. Chaque rectangle du schéma représente une surface carrée de 100 pieds carrés.

Table des  
matières

Index  
thématique

Les distances sont calculées «à vol d'oiseau» entre les centres des ateliers, ce qui est acceptable si ceux-ci sont localisés sur des surfaces carrées, mais est beaucoup plus contestable lorsque l'atelier a une configuration géométrique nettement différente (rectangle de faible largeur, configuration en L...). Le calcul «à vol d'oiseau» peut être biaisé lorsque certaines contraintes (pilier de soutènement par exemple) rendent physiquement impossible cet itinéraire. Par ailleurs, l'hypothèse de coûts de manutention proportionnels aux distances peut ne pas être toujours réaliste. Cela étant, ces distorsions sont du second ordre le plus souvent, car, la recherche d'une solution réellement optimale est sans grand intérêt. En effet, l'optimum est conditionné par la fiabilité des informations recueillies et par leur représentativité (c'est-à-dire pour une performance des structures observées à un moment donné). Ajoutons enfin que le recueil des données de base est d'un coût élevé, ce qui fait que l'on n'aura intérêt à s'attaquer à ce problème que si les coûts de manutention sont élevés et si une certaine permanence des structures peut raisonnablement être postulée.

Pour en finir sur ce problème, indiquons que, depuis de nombreuses années, des logiciels plus performants, prenant en compte des formulations plus complexes du problème de l'implantation (notamment en travaillant sur 3 dimensions) sont disponibles et que des problèmes de complexité moyenne<sup>2</sup> peuvent maintenant

1. Voir Buffa, Armour & Vollmann (1964, [72]). Le lecteur intéressé pourra consulter une bibliographie complète sur ce thème dans les articles de R.V.Johnson (1982, [244]), et Fould (1983, [155]), ainsi que l'ouvrage de Francis et White (1974, [159]).

TABLEAU 36  
Exemple d'implantation optimale dans un cas réel  
(adapté de Buffa, Armour & Vollmann, [72])

Ancienne configuration Coût 329498										Nouvelle configuration Coût 264508										
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	N	N	N	N	N	B	B	B	A	A						
S	S	S	S	S	N	N	N	N	N	B	B	B	A	A						
S	S	S	S	S	N	N	N	N	N	B	B	B	A	A						
S	S	S	S	P	M	L	L	N	N	B	B	B	A	A						
R	R	R	P	P	L	L	L	L	L	B	B	B	A	A						
R	R	R	P	P	L	L	L	L	L	B	B	B	A	A						
Q	Q	P	P	P	L	L	L	L	L	D	D	D	C	C						
Q	Q	P	P	P	L	L	L	K	K	D	D	D	C	C						
Q	Q	P	P	P	K	K	K	K	K	D	D	D	C	D						
O	O	O	O	O	K	K	K	K	K	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	K	K	K	K	K	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	U	U	U	U	U	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	U	U	U	U	U	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	U	U	U	U	U	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	U	U	U	U	U	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E						
O	O	O	O	O	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E						
O	O	O	O	O	I	I	I	I	I	J	J	J	E	E						
O	O	O	O	O	I	I	I	I	I	J	J	J	J	J						
O	O	O	O	O	I	I	I	I	I	F	F	F	F	F						
O	O	O	O	O	M	M	M	M	F	F	F	F	F	F						
O	O	O	O	O	G	G	G	G	F	F	F	F	F	F						
O	O	O	O	O	G	G	G	G	F	F	F	F	F	F						
P	P	P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
P	P	P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	P	P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	B	B	B	B	B	B	D	D	M	M						
T	T	T	T	T	B	B	B	B	B	D	D	D	M	M						
T	T	T	T	T	B	B	B	B	B	D	D	D	D	D						
T	T	T	T	M	B	B	K	K	K	D	D	D	D	D						
S	S	S	L	L	L	L	K	K	K	D	D	D	D	D						
S	S	S	L	L	L	L	K	K	K	D	D	D	D	D						
S	S	S	L	L	L	L	K	K	K	D	D	D	D	D						
S	S	S	L	L	L	L	K	K	K	D	D	D	D	D						
R	S	S	L	L	L	L	I	K	K	D	D	D	D	N						
R	R	R	C	I	I	I	I	I	I	I	N	N	N	N						
R	R	C	C	I	I	I	I	I	I	I	N	N	N	N						
Q	Q	Q	C	I	I	I	I	I	I	I	N	N	N	N						
Q	Q	Q	C	U	U	U	U	U	U	G	G	N	N	N						
F	F	F	F	U	U	U	U	U	U	G	G	G	J	J						
F	F	F	F	U	U	U	U	U	U	G	G	G	J	J						
F	F	F	F	E	E	E	E	E	E	A	A	A	J	J						
F	F	F	F	E	E	E	E	E	E	A	A	A	A	A						
F	F	F	E	E	E	E	E	E	E	A	A	A	A	A						
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Table des matières

Index thématique

facilement être résolu en utilisant un tableur et un algorithme génétique sous forme d'add-in<sup>1</sup>.

**IV-2 Détermination de la durée de vie optimale d'un équipement**

Le problème se pose concrètement en univers aléatoire ou en univers incertain, mais avant de traiter ce cas au § IV-2.2, page 243, nous étudierons ce problème en univers certain au § IV-2.1 pour introduire la problématique posée et parce que souvent cette simplification permet d'obtenir rapidement des ordres de grandeurs acceptables.

2. Note de la page précédente. Si les surfaces requises par les différents ateliers sont différentes on peut se ramener au cas général en partant sur des multiples d'une surface de base et en considérant que les trafics entre ces parties d'un atelier sont très importants pour forcer la contiguïté.

1. Voir les exemples d'utilisation d'Evolver dans ce chapitre (page 196 et page 224).

## IV-2.1 Détermination de la durée de vie optimale en univers certain

Nous verrons tout d'abord (§ IV-2.1.1) les critères utilisables pour déterminer la durée de vie optimale, avant d'en présenter les applications pour des remplacements à l'identique (§ IV-2.1.2, page 237) ou non (§ IV-2.1.3, page 242).

### IV-2.1.1 Critères de détermination de la durée de vie optimale

Différents critères faisant appel à l'actualisation sont possibles. Nous utilisons ici la notation discrète, à la place de la notation continue habituellement utilisée dans la littérature spécialisée, pour rendre la problématique plus facilement intelligible<sup>1</sup>. Supposons, pour commencer, que l'équipement considéré soit seul à contribuer à la fabrication d'un bien, ou à la fourniture d'une prestation de services (véhicule automobile d'un chauffeur de taxi, par exemple). On notera :

- $R_t$ , la recette d'exploitation de la période  $t$ , imputable à l'équipement considéré,
- $D_t$ , les dépenses directes d'exploitation «hors amortissement» associées au volume de production  $q_t$  de la période  $t$ , y compris, pour les périodes concernées, le coût d'acquisition de l'équipement ou la recette associée à la revente du matériel d'occasion (dépense négative),
- $M_t = R_t - D_t$ , la marge brute réalisée au cours de la période  $t$ , laquelle correspond au flux net de trésorerie associé à la séquence d'investissement,
- $\alpha$ , le taux d'actualisation utilisé dans l'entreprise ; ce taux est défini pour une unité de temps qui est celle de la période de référence utilisée.

Le problème de la détermination de la durée de vie optimale peut être formulé dans le cadre d'un horizon limité à  $T$  périodes (par exemple l'intervalle de temps séparant la prise de décision et l'échéance d'une concession) ou dans le cadre d'un horizon infini ( $T = \infty$ ). Dans les deux cas, l'optimum se caractérise par une séquence de décisions de renouvellement, et donc par un certain échéancier de dépenses sur  $T$  périodes. Le seul intérêt de cette distinction est que, sous certaines conditions, la séquence de décisions optimales dans le cadre d'un horizon infini est la reconduction d'une même durée de vie optimale pour tous les équipements de la chaîne de remplacement. Les échéanciers, définis pour les périodes  $1$  à  $T$ , que nous actualiserons seront implicitement définis pour une politique  $i$  donnée de renouvellement des équipements. Cette stratégie a un impact direct sur l'échéancier  $D_t$  qui, d'une part inclut les dépenses d'achat et de recettes de revente d'occasion et, d'autre part, comporte des dépenses d'entretien qui dépendent habituellement de la durée de vie retenue et de l'échéancier  $q_t$ . Elle peut également avoir un impact indirect sur  $R_t$  et/ou  $q_t$ , si la production porte sur une prestation de service et que celle-ci se dégrade avec l'âge de l'équipement (par exemple, un taxi a rarement plus de dix ans d'âge, du moins en France).

Le premier critère<sup>2</sup> qui vient à l'esprit est celui de la maximisation de la marge brute actualisée, par rapport aux différentes politiques  $i$ .

1. La notation continue permet de trouver plus facilement les politiques optimales, mais les résultats trouvés sont plus difficiles à interpréter.

2. *Note de la page précédente*. Le seul habituellement utilisé en univers certain. Voir Jorgenson, Mac Call et Radner (1974, [253]), p. 6-8, ou Boiteux (1964, [59]), p. 136-141 ; ces différents auteurs utilisent la notation continue.

$$\text{critère 1 : maximum}_i \left\{ \sum_{t=1}^T (R_{it} - D_{it})(1 + \alpha)^{-t} \right\} \quad \text{relation 36}$$

Si l'échéancier de recettes est le même quelle que soit la politique adoptée, ce critère est équivalent à celui de la minimisation des dépenses.

$$\text{critère 2 : minimum}_i \left\{ \sum_{t=1}^T D_{it}(1 + \alpha)^{-t} \right\} \quad \text{relation 37}$$

Ce dernier critère permet d'éviter d'avoir à formuler des hypothèses sur l'échéancier  $R_{it}$ , ou plus précisément sur les recettes unitaires, car l'échéancier  $D_{it}$  est fonction de l'échéancier  $q_{it}$ . Une hypothèse de calcul très fréquemment retenue est celle de la constance de la production ( $q_{it} = q$ ), qui n'est acceptable, en particulier, que si aucune obsolescence technique ou commerciale ne vient frapper l'équipement étudié mais est cohérent avec l'hypothèse d'un régime de croisière stable.

Lorsque plusieurs équipements concourent simultanément à la production d'un ou plusieurs biens (ou prestations de service), le critère 2 est alors seul utilisable, car il est arbitraire d'imputer tout ou partie des recettes à l'un ou l'autre des facteurs productifs (d'autant plus qu'apparaissent des charges fixes non affectables s'il y a plusieurs productions). L'utilisation de ce critère implique que l'échéancier des recettes associé à l'un quelconque de ces produits (ou prestation de service) est indépendant de la stratégie retenue pour chacun des facteurs productifs. Par ailleurs, s'il y a plusieurs productions  $j$ ,  $D_{it}$  est la dépense directe d'exploitation associée aux productions  $q_{ijt}$ , et il est, là encore, commode de postuler que ces productions  $q_{ijt}$  sont constantes dans le temps et indépendantes de la stratégie  $i$  ( $q_{ijt} = q_j$ ).

Lorsque l'on se situe en univers aléatoire, le choix d'une politique de maintenance et de remplacement se traduit par une espérance mathématique de dépenses  $E(D_t)$  et une espérance mathématique  $E(\theta_t)$  de temps d'utilisation  $\theta_t$  durant la période  $t$  (on a  $E(\theta_t) < 1$ , chaque période étant conventionnellement d'une durée égale à 1). Si le temps de fonctionnement correct de l'équipement peut être valorisé au tarif unitaire  $v$ , on obtient un troisième critère équivalent au premier en retenant la politique  $i$  qui maximise la valeur actualisée de la différence entre l'espérance mathématique de la valorisation du temps disponible, et celle des dépenses :

$$\text{critère 3 : maximum}_i \left\{ \sum_{t=1}^T [vE(\theta_{it}) - E(D_{it})](1 + \alpha)^{-t} \right\} \quad \text{relation 38}$$

Si le temps d'utilisation  $\theta_{it}$  a une espérance mathématique très proche de l'unité (maintenance ou remplacement effectués en dehors des heures normales d'utilisation, par exemple), le critère 3 est, à une constante près, équivalent au critère 4 suivant, qui est l'équivalent, en espérance mathématique, du critère 2.

$$\text{critère 4 : } \underset{i}{\text{minimum}} \left\{ \sum_{t=1}^T E(D_{it})(1 + \alpha)^{-t} \right\} \quad \text{relation 39}$$

D'autres critères peuvent être encore utilisés, et plus particulièrement le quotient de l'espérance mathématique actualisée du temps d'utilisation par celle des dépenses, qui, sous certaines conditions, est équivalent au critère 3 et plus facile d'utilisation. Cette discussion dépasse cependant le propos introductif que l'on s'est fixé<sup>1</sup>.

#### IV-2.1.2 Détermination de la durée de vie optimale dans le cas d'un remplacement à l'identique

Au cours de la présentation des critères, nous avons distingué le cas de l'horizon infini, de celui de l'horizon limité. Nous aborderons d'abord rapidement ce dernier cas, en indiquant que la programmation dynamique à laquelle il sera fait appel, permet de traiter également le cas d'une chaîne de remplacements de caractéristiques non identiques.

##### IV-2.1.2.1 Cas d'un horizon limité

Nous partirons d'un exemple introductif, que nous résoudrons ensuite après en avoir montré la solution analytique.

###### IV-2.1.2.1a) Exemple introductif

L'entreprise **Ordomeca** doit acheter une machine au début de la période 1 (et éventuellement au début d'une période ultérieure) pour la fabrication d'un article qu'elle prévoit de fabriquer pendant 6 ans. Les coûts de fabrication, d'achat en début de période et de revente en fin de période, sont donnés (après actualisation à la date  $t = 0$ ) dans le [tableau 37 de la page 239](#), dans lequel  $c_{ij}$  est le coût d'utilisation total d'une machine achetée en début de période  $i$  (c'est-à-dire à la date  $i - 1$ ) et revendue en fin de période  $j$  (c'est-à-dire à la date  $j$ ), ce qui donne par exemple:  $c_{24} = 220 + 50 + 60 - 75 = 225$ .

###### IV-2.1.2.1b) Solution analytique

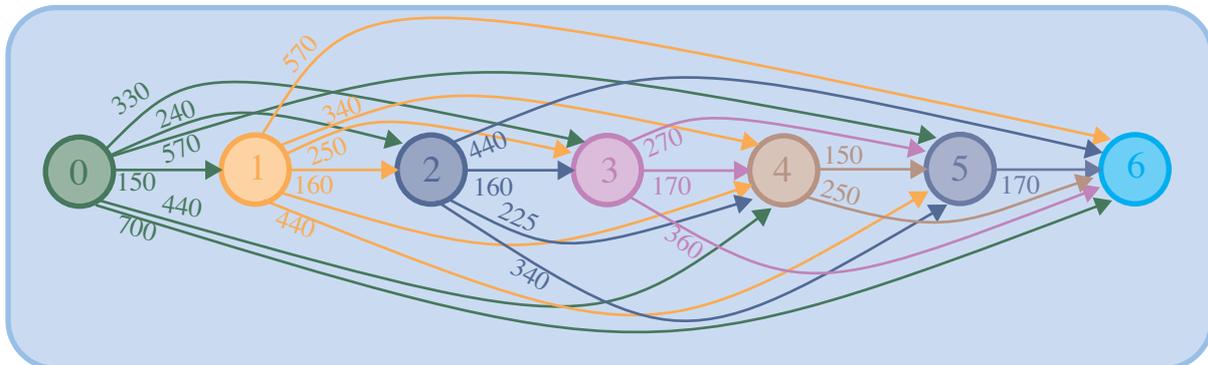
La résolution de ce problème s'effectue sans difficulté en utilisant la programmation dynamique qui sera présentée en détail au [chapitre VIII \(section II, page 562\)](#), l'analogie avec un problème de transport étant évidente, comme l'illustre la [figure 60](#) où :

- les nombres cerclés représentent des dates de fin de périodes, à la place des villes,
- les arcs visualisent l'utilisation d'une machine entre sa date d'acquisition  $i$  (nœud de départ) et sa date de revente  $j$  (nœud d'arrivée), à la place des itinéraires; sur ces arcs sont notés les coûts  $c_{ij}$ , somme des coûts d'achat en  $i$ , de fonctionnement entre  $i$  et  $j$ , diminuée de la valeur de récupération en  $j$ .

1. Voir Jorgenson, Mac Call et Radner (1974, [253]), p. 15-17, pour une représentation de ces critères en notations continues.

FIGURE 60

Graphe associé au problème de détermination de la durée de vie optimale d'un équipement (exemple du tableau 37 de la page 239)



On peut utiliser l'algorithme général de la programmation dynamique en définissant de façon récurrente le coût minimal  $f_t$  de fonctionnement du système entre les dates  $t$  et  $T$ :

$$f_t = \underset{i < t}{\text{minimum}}(f_i + c_{it}), \text{ avec } t = T - 1, T - 2, \dots, 0 \quad \text{relation 40}$$

Cette formulation de type *backward* peut être utilisée telle quelle, mais il est aussi simple d'exploiter la formulation équivalente de type *forward* (relation 41 de la page 238) qui sera utilisée dans les problèmes de programmation de la production avec coûts concaves (chapitre VIII, § II-4.1, page 582) et où  $f_t$  représente le coût minimal de fonctionnement du système entre les dates 0 et  $t$  (c'est-à-dire pour les périodes 1 à  $t$ ):

$$f_t = \underset{i < t}{\text{minimum}}(f_i + c_{it}), \text{ avec } i = 0 \text{ à } t - 1, f_0 = 0 \text{ et } t = 1 \text{ à } T \quad \text{relation 41}$$

Cette relation 41 permet de rechercher l'optimum dans un tableau du type du tableau 38.

#### IV-2.1.21c) Résolution numérique de l'exemple introductif

La recherche numérique s'effectue dans le tableau 38 de la page 240 d'où l'on tire que la politique optimale consiste à acheter à la date 0, puis à revendre à la date 2 l'équipement sur le marché de l'occasion, et à racheter aussitôt un équipement neuf qui sera vendu à la date 6, fin de l'horizon économique retenu.

#### IV-2.1.2.2 Cas de l'horizon infini

On démontre alors<sup>1</sup> que la politique optimale est de type stationnaire, c'est-à-dire qu'elle consiste à utiliser toutes les machines de la chaîne infinie de remplacement, pendant exactement le même nombre de périodes. Nous allons utiliser cette propriété et le critère 2 pour résoudre un exemple numérique.

#### IV-2.1.22a) Exemple numérique

**Ordomeca** envisage l'achat de la machine MGI dont la durée de vie physique est de 10 ans et elle se demande quelle est la durée de vie économique de cette machine qui coûte 200000 dollars liduriens. Les données annuelles prévision-

1. Voir Wagner (1975, [435]), p. 399-402.

TABLEAU 37  
Exemple de coûts utilisés dans une détermination de durée de vie optimale d'un équipement en univers certain, avec horizon borné

		Période j d'utilisation						
		1	2	3	4	5	6	
machine achetée à la date $i =$	0	Achat en $i$	200	-	-	-	-	-
		Fonctionnement	50	60	70	90	110	130
		Revente en $j$	100	70	50	30	10	0
		$c_{ij}$	150	240	330	440	570	700
	1	Achat en $i$		210	-	-	-	-
		Fonctionnement		50	60	70	90	110
		Revente en $j$		100	70	50	40	20
		$c_{ij}$		160	250	340	440	570
	2	Achat en $i$			220	-	-	-
		Fonctionnement			50	60	70	80
		Revente en $j$			110	75	60	40
		$c_{ij}$			160	255	340	440
	3	Achat en $i$				230	-	-
		Fonctionnement				50	60	70
		Revente en $j$				110	70	50
		$c_{ij}$				170	270	360
	4	Achat en $i$					230	-
		Fonctionnement					50	60
		Revente en $j$					130	90
		$c_{ij}$					150	250
5	Achat en $i$						250	
	Fonctionnement						60	
	Revente en $j$						140	
	$c_{ij}$						170	

Table des matières

Index thématique

nelles de coûts, en dollars constants, sont données dans le [tableau 39 de la page 240](#). Le taux d'actualisation utilisé est de 5% /an (taux réel, et non nominal).

IV-2.1.22b) Solution analytique

L'application du critère 2 ([relation 37, page 236](#)) peut s'effectuer en deux temps:

- calculer la valeur actualisée en  $t = 0$  de l'échéancier de la première machine achetée et utilisée  $n$  périodes (calcul à effectuer pour chacune des durées de vie possibles);
- calculer l'annuité constante équivalente (fin de période) à l'échéancier réel d'utilisation d'une machine pendant  $n$  périodes (calcul à effectuer pour chacune des durées de vie possibles).

TABLEAU 38  
Application de l'algorithme forward de programmation dynamique

		Date $j$ de fin de service						
		1	2	3	4	5	6	
Date $i$ de mise en service	0	$c_{0j}$	150	240	330	440	570	700
	1	$c_{1j}$		160	250	340	440	570
		$f_1 + c_{1j}$		310	400	490	590	720
	2	$c_{2j}$			160	255	340	440
		$f_2 + c_{2j}$			400	495	580	680
	3	$c_{3j}$				170	270	360
		$f_3 + c_{3j}$				500	600	690
	4	$c_{4j}$					150	250
		$f_4 + c_{4j}$					190	690
	5	$c_{5j}$						170
		$f_5 + c_{5j}$						740
		$f_t$		150	240	330	440	570
	$g_t$		0	0	0	0	0	2

TABLEAU 39  
Dépenses d'exploitation et valeur d'occasion de la MG-1<sup>1</sup>

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dépenses directes d'exploitation	50	50	50	50	70	80	90	100	120	130
Valeur de revente à l'âge $t$	100	50	20	10	0	0	0	0	0	0

1. en milliers de dollars liduriens.

La durée de vie optimale est celle à laquelle correspond la plus faible annuité constante équivalente. En effet, pour le taux d'actualisation retenu, si l'échéancier réel, défini pour une durée de vie de  $n$  périodes, est équivalent à un échéancier de  $n$  versements constants, la répétition jusqu'à l'infini de l'échéancier réel est alors équivalente à la répétition jusqu'à l'infini de l'échéancier constant.

#### IV-2.1.22c) Solution de l'exemple numérique

Il ressort du [tableau 40](#) que la durée de vie économique de la MG1 est de 7 ans.

La valeur du critère 2, pour cette politique de remplacement à l'identique tous

les 7 ans, est de:  $96,05 \sum_{t=1}^{\infty} 1,05^{-t} = 1921$ , et le gain réalisé, en choisissant cette

durée de vie économique de préférence à la durée de vie physique, est de  $(101,89 - 96,05) / 101,89 = 5,7\%$ .

#### IV-2.1.22d) Remarques

L'étude de la solution optimale appelle trois remarques:

TABLEAU 40  
Détermination de la durée de vie optimale de la machine MG-1

Durée d'utilisation $n$	$D_t$	$\frac{D_t}{1,05^n}$	$\sum_{t=0}^n \frac{D_t}{1,05^n}$	$V_n$	$\frac{V_n}{1,05^n}$	$\sum_{t=0}^n \frac{D_t}{1,05^n} - \frac{V_n}{1,05^n}$	Annuité pour une durée d'utilisation $n$
0	200	200,00	200,00				
1	50	47,62	247,62	100	95,24	152,38	160,00
2	50	45,35	292,97	50	45,35	247,62	133,17
3	50	43,19	336,16	20	17,28	318,89	117,10
4	50	41,14	377,30	10	8,23	369,07	104,08
5	70	54,85	432,14	0	0,00	432,14	99,81
6	80	59,70	491,84	0	0,00	491,84	96,90
7	90	63,96	555,80	0	0,00	555,80	<b>96,05</b>
8	100	67,68	623,49	0	0,00	623,49	96,47
9	120	77,35	700,84	0	0,00	700,84	98,60
10	140	85,95	786,79	0	0,00	786,79	101,89

- La détermination de la durée de vie optimale conduit au calcul d'un coût moyen actualisé annuel. Lorsque plusieurs équipements sont en compétition, la comparaison économique de ces équipements doit s'effectuer en comparant leurs coûts moyens actualisés annuels.
- La détermination de cette durée de vie optimale dépend du taux d'actualisation retenu et peut être éventuellement peu sensible au choix du taux d'actualisation.
- Lorsque la valeur résiduelle est nulle, ce qui se produit dans notre exemple à partir de la cinquième période, et que les dépenses de fonctionnement sont croissantes au cours du temps, on peut arrêter les calculs dès que la dépense annuelle devient supérieure à la dernière annuité calculée. En effet, dans notre exemple, l'échéancier réel d'une machine gardée 7 années est équivalent à un échéancier constant de 7 versements de 96,06. Prolonger la durée de vie d'une année revient à vérifier si l'annuité constante équivalente à l'échéancier réel que l'on aurait en gardant la machine 8 ans, est inférieure à 96,06, or ceci revient à rechercher l'annuité constante équivalente d'un échéancier de huit versements, les sept premiers étant de 96,06 et le huitième, de 100. Lorsque la valeur de revente est négligeable et que les dépenses de fonctionnement sont croissantes, la date de renouvellement optimale est celle qui précède la date pour laquelle la dépense de fonctionnement devient supérieure au coût moyen actualisé<sup>1</sup>.

Table des matières

Index thématique

1. Voir également la démonstration, en notations continues et pour le critère 1, dans Boiteux (1964, [59]), p. 140-141 («La date de renouvellement optimale est celle pour laquelle le bénéfice **brut** de l'année devient égal à la moyenne actualisée des bénéfices **nets**»), ou encore dans Jorgenson, Mac Call et Radner (1974, [253]), p. 7-10.

### IV-2.1.3 Détermination de la date de déclassement optimale

Lorsqu'apparaît sur le marché un matériel plus performant<sup>1</sup> que celui en cours d'utilisation, deux politiques sont envisageables : garder le matériel initial jusqu'à la fin de sa durée de vie économique ou anticiper son déclassement pour bénéficier des performances accrues du nouveau matériel. Ce problème peut se poser dans le cadre d'un horizon limité et se traite alors sans difficulté à l'aide de la programmation dynamique (cf. § III-1.2.1, page 204) mais il se pose le plus souvent dans le cadre d'un horizon infini (ou, ce qui revient au même, sans horizon bien précis). Nous introduirons d'abord un exemple numérique avant de présenter la solution.

#### IV-2.1.3.1 Exemple introductif

**Ordomeca** envisage de remplacer la machine MG1 qui fonctionne depuis 2 ans par la nouvelle machine MG2 plus performante, qui coûte 210 000 dollars liduriens et a une durée de vie physique estimée à 10 ans. Les données économiques de cette nouvelle machine (comparables à celle du [tableau 39 de la page 240](#)) figurent dans le [tableau 41](#).

TABLEAU 41  
*Dépenses d'exploitation et valeur d'occasion de la MG-2<sup>1</sup>*

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dépenses directes d'exploitation	30	30	30	40	50	60	70	80	90	100
valeur de revente à l'âge $t$	100	50	20	10	0	0	0	0	0	0

1. en milliers de dollars liduriens

La durée de vie économique de cette machine MG-2 reste, comme vous pouvez le vérifier, de 7 ans mais l'annuité constante équivalente pour cette durée de vie descend à 79,20 (contre 96,05 pour la machine MG-1). Le problème posé est de savoir quand il est judicieux, d'un point de vue économique, de remplacer la machine MG1 par la machine MG2.

#### IV-2.1.3.2 Solution

Si l'on reprend le raisonnement des équivalences d'échéanciers conduit au § III-1.2.2.2, page 206, il est évident<sup>2</sup> que l'on n'a pas intérêt à anticiper la mise en service de la machine MG-2 tant que la nouvelle annuité (79,20) est inférieure à la dépense d'exploitation annuelle (diminuée, le cas échéant, de la valeur d'occasion). L'examen du [tableau 39 de la page 240](#) montre que l'année 6, la dépense d'exploitation (80) est supérieure à la nouvelle annuité, mais que l'année 5 c'est l'inverse qui se produit. On a donc intérêt à acheter la machine MG-2 à la fin de l'année 5 et donc à anticiper d'une année la radiation prévue.

1. À côté de cette obsolescence technique, dont l'incidence porte principalement sur les flux de dépense, peut exister une obsolescence de nature commerciale liée à l'inadéquation progressive de l'équipement à fournir des produits ou des prestations de service vendables. L'obsolescence commerciale a un impact sur les flux de recettes et oblige alors en général, à recourir au critère 1.

2. Voir également Boiteux (1964, [59]), p. 144-145, qui, en utilisant le critère 1 et des notations continues, aboutit à la conclusion suivante, valable si la valeur d'occasion est négligeable : « la date de déclassement optimale est celle pour laquelle le bénéfice brut devient inférieur à la moyenne actualisée du bénéfice net de l'installation de remplacement ».

## IV-2.2 Détermination de la durée de vie optimale en univers aléatoire

Lorsque la durée de vie d'un équipement est aléatoire, cet équipement comportant un (ou plusieurs) composant(s) dont la durée de vie est elle-même aléatoire, la dépense d'une période devient alors une variable aléatoire. Il convient alors d'utiliser le critère 3 ou le critère 4. La résolution de ce problème est complexe, car il dépend étroitement de la politique de maintenance. Nous commencerons dans le § IV-2.2.1 par donner un aperçu de cette problématique. Nous aborderons ensuite (§ IV-2.2.2, page 244) le problème de l'estimation de la loi de la durée de vie d'un composant. Nous calculerons enfin (§ IV-2.2.3, page 249), sur un exemple simplifié (mais tiré de la réalité), la durée de vie optimale d'un équipement.

### IV-2.2.1 Le problème posé

Nous avons dit que le problème de la durée de vie optimale dépendait de la politique de maintenance suivie<sup>1</sup>. Nous nous contenterons d'en retracer ici brièvement la philosophie pour faire comprendre la complexité du problème posé.

Les politiques de maintenance visent à définir un ensemble de règles de décision permettant de garantir, à un coût minimal, un même niveau de service pour un matériel en état de marche, tout au long de son existence. Ces règles de décision concernent la mise en œuvre d'une ou de plusieurs des actions suivantes : remplacement préventif d'un composant, remplacement d'un composant après panne (action exclusive ou non de la précédente), inspection périodique du matériel. Le système d'information conduisant à connaître le bon fonctionnement de tous les composants d'un matériel de façon continue ou par intermittence conditionne le choix des politiques possibles et a un coût qui est généralement non pris en compte dans les modèles de maintenance.

Lorsque le bon fonctionnement du système est connu de façon continue, il n'y a pas d'autre action de maintenance que le remplacement de composants. Si le coût d'un remplacement préventif est plus faible que celui occasionné par le remplacement après panne, et si le taux de défaillance<sup>2</sup> croît avec l'âge du composant, la politique optimale consiste à remplacer le composant lorsqu'il tombe en panne, ou préventivement à un âge déterminé par le calcul économique. La détermination du remplacement préventif est aisée si la machine considérée ne comporte qu'un seul composant, ou plusieurs composants indépendants (les politiques optimales se définissant alors comme la juxtaposition de politiques déterminées de façon indépendante). La dépendance de composants peut être due soit à des économies réalisées en remplaçant simultanément plusieurs composants

1. Il ne peut être question d'aborder ici la problématique de la maintenance, qui justifierait à elle seule de longs développements et nécessiterait l'appel à des outils mathématiques plus sophistiqués que ceux utilisés dans cet ouvrage. Une bonne introduction à une approche formalisée des problèmes de maintenance peut être trouvée dans l'ouvrage de Pellegrin (1997, [333]).

2. Le taux de défaillance est la probabilité conditionnelle qu'un composant tombe en panne entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , en sachant qu'il a atteint l'âge  $t$ . Une comparaison démographique peut mieux faire saisir cette notion : si sur une génération de 1000 personnes, 400 sont mortes avant l'âge de 60 ans, c'est-à-dire que 600 atteignent l'âge de 60 ans, et si 50 d'entre elles meurent avant d'atteindre l'âge de 61 ans, la probabilité conditionnelle de décès (c'est-à-dire le taux de défaillance) est de  $50/600 = 8\%$ , et ne doit pas être confondue avec la probabilité de mourir dans la 61ème année (ici 5%).

(assemblés en module par exemple), soit à des lois de durée de vie de certains composants qui dépendent de l'âge d'autres composants. La politique optimale consiste alors à remplacer simultanément plusieurs composants lorsque l'un d'entre eux tombe en panne, ou après une durée d'utilisation fixée par le calcul. Ces règles de décision sont fixées une fois pour toutes si l'on se place dans une perspective de machine en état de marche jusqu'à l'infini, et si les données de coûts (qui fondent l'arbitrage) restent les mêmes. Par contre, si l'on décide d'utiliser l'équipement pour une durée fixée a priori, ces règles doivent être revues dès lors qu'un remplacement de composant(s) se produit avant un remplacement à titre préventif.

Lorsque le bon fonctionnement du système est connu de façon intermittente, le problème se complique par l'intervention, dans l'arbitrage économique, du coût d'obtention des informations sur le système, informations fournies par des inspections périodiques.

Il ressort de cette description rapide, qu'en univers aléatoire, la détermination de la durée de vie aléatoire est inséparable de la définition d'une politique de maintenance, à moins de n'envisager que le cas de remplacement après panne (qui, habituellement, conduit à un coût plus élevé en raison de perturbations imprévues). C'est ce cas de figure que nous retiendrons pour donner un aperçu des problèmes posés. Mais pour cela, il faut d'abord déterminer la durée de vie de ses principaux composants.

#### IV-2.2.2 Détermination de la loi de durée de vie d'un composant

Commençons par préciser deux concepts utilisés classiquement dans cette problématique.

- Si l'on note  $T$ , la variable aléatoire «durée de vie d'un composant», c'est-à-dire l'intervalle de temps séparant sa mise en service, du moment où il est hors d'usage, la fonction de répartition  $F(t)$  donne la probabilité  $P(T < t)$ , c'est-à-dire la probabilité que la durée de vie du composant soit inférieure ou égale à  $t$ . La probabilité que la durée de vie soit supérieure ou égale à  $t$  est donc  $1 - F(t)$ . Ce complément à 1 de la fonction de répartition est appelé **loi de fiabilité** du composant.
- Si l'on note  $h(t)$  le **taux de défaillance**, on a, par définition des probabilités conditionnelles et si l'on se souvient que la probabilité instantanée de défaillance – c'est-à-dire la densité de probabilité  $f(t)$  – est la dérivée de la fonction de répartition :

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{F(t)'}{1 - F(t)} = -\{\log[1 - F(t)]\}' \quad \text{relation 42}$$

##### IV-2.2.2.1 Estimation de la loi de durée de vie

Lorsque l'on dispose d'un échantillon de quelques dizaines d'observations d'une variable, on peut facilement exploiter ces informations à l'aide d'un logiciel spécialisé pour déterminer, parmi les distributions de probabilité qui semblent a priori acceptables pour opérer une bonne synthèse du phénomène étudié, celle qui est la meilleure du point de vue statistique<sup>1</sup>. Lorsque l'on s'intéresse à la durée de vie d'un organe, ceci suppose que l'on dispose d'un ensemble d'informations relatives à la durée maximale d'utilisation avant d'être hors d'usage. Souvent les

informations recueillies sont insuffisantes pour permettre une analyse de qualité. Il faut alors exploiter au mieux les informations disponibles et, en particulier, la connaissance que l'on a des composants utilisés depuis un certain temps et considérés encore comme utilisables. Examinons, à partir d'un exemple, comment traiter ce problème.

L'entreprise **Ordomeca** a 35 véhicules **Volnault** en service, et dispose des carnets d'entretien de 5 véhicules radiés. Tous ces véhicules sont utilisés dans des conditions similaires. Les informations relatives au moteur de ce véhicule sont données dans le [tableau 42 de la page 246](#). Le fichier ainsi constitué fournit des observations sur davantage de moteurs que de véhicules puisque l'on observe un certain nombre de moteurs en plus des moteurs d'origine<sup>1</sup>.

Pour procéder à la reconnaissance d'une distribution théorique, il faut d'abord reconstituer la distribution observée qui se caractérise par un ensemble de couples de points  $t, F(t)$ , où  $F(t)$  est l'estimation de la probabilité que la durée de vie  $T$  soit inférieure à  $t$ . Deux méthodes sont possibles pour obtenir ces informations: la première est une estimation à partir de fréquences observées et la seconde, plus performante, utilise la fonction de hasard.

#### IV-2.2.21a) Estimation à partir des fréquences observées

Le principe de base est relativement simple. Il consiste à imaginer que l'on procède, par exemple, à l'expérience suivante: sachant que l'on soumet un échantillon de moteurs à l'expérience «utilisation pendant 120000 km», combien de moteurs seront tombés en panne avant d'atteindre ce kilométrage?

Dans une première approche, on peut imaginer que l'on procède, par exemple, à l'expérience suivante: sachant que l'on soumet un échantillon de moteurs à l'expérience «utilisation pendant 120000 km», combien de moteurs seront tombés en panne avant d'atteindre ce kilométrage? Une première réponse à cette question consiste à ne s'intéresser qu'aux moteurs d'origine. Dans ce cas, les moteurs des véhicules 24 à 40 constituent l'échantillon recherché (de taille 17) où seuls étaient en état de marche après cette épreuve, les moteurs d'origine des véhicules 24, 30, 35, 36 et 39<sup>2</sup>. L'estimation de la probabilité que la durée de vie d'un moteur soit inférieure à 120000 km est alors  $(17 - 5)/17 = 70,6\%$ .

Table des  
matières

Index  
thématique

1. *Note de la page précédente.* Plusieurs tests sont classiquement utilisés par des logiciels spécialisés, comme *Bestfit*<sup>®</sup> de Palisade (<http://www.palisade.com> d'où peuvent être téléchargées des versions complètes d'évaluation, utilisables sur quelques semaines):  $\chi^2$ , Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling. Ces deux derniers tests sont à utiliser pour des distributions continues, le test d'Anderson-Darling étant plus puissant que celui, plus connu, de Kolmogorov-Smirnov est à utiliser de préférence pour les distributions continues; le test du  $\chi^2$ , le plus connu, présente l'inconvénient, pour les distributions continues, d'un regroupement arbitraire des observations en classe et s'avère le moins puissant. Ces logiciels calculent, pour chaque distribution testée, l'estimation du maximum de vraisemblance de chaque paramètre caractéristique de la loi de probabilité sélectionnée.

1. Par exemple, le *douzième* véhicule du fichier a eu son moteur d'origine changé au bout de 38000 km puis un second moteur changé après 11800 km; son troisième moteur a donc  $93600 - 38000 - 11800 = 43800$  km au moment où le fichier est constitué. Le second moteur du *onzième* véhicule est changé au moment où l'enquête est réalisée ( $892 = 415 + 477$ ); son troisième moteur n'a donc pas encore fonctionné, ce qui implique que ce véhicule était en réparation lors de la constitution du fichier. Au total on dispose donc de 68 informations du type «composant tombé en panne au kilométrage  $x$ » ou «composant encore en état de marche au kilométrage  $x$ ».

2. Le moteur d'origine des véhicules 35 et 39 étaient en état de marche «au Kilomètre 120000» au moment de la constitution du fichier mais ont été remplacés ensuite.

TABLEAU 42  
Données de base (âges exprimés en centaines de kilomètres)

n° du véhicule	âge <sup>1</sup>	âge au décès du		n° du véhicule	âge <sup>1</sup>	âge au décès du	
		moteur d'origine <sup>2</sup>	second moteur <sup>3</sup>			moteur d'origine <sup>2</sup>	second moteur <sup>2</sup>
1	130	0	-	21	1 150	0	-
2	220	0	-	22	1 183	0	-
3	300	0	-	23	1 190	798	-
4	325	0	-	24	1 298	0	-
5	390	0	-	25	1 300	448	443
6	490	0	-	26	1 311	250	163
7	590	0	-	27	1 320	750	0
8	610	0	-	28	1 366	439	0
9	680	0	-	29	1 380	1 150	0
10	830	0	-	30	1 400	0	-
11 <sup>4</sup>	892	415	477	31	1 420	500	0
12 <sup>4</sup>	936	380	118	32	1 450	537	656
13	940	554	0	33	1 460	870	0
14	969	0	-	34	1 500	237	221
15	990	700	0	35	1 513	1 224	0
16	1 027	313	468	36	1 550	0	-
17	1 060	767	0	37	1 640	890	0
18	1 070	510	0	38	1 700	1 000	0
19	1 100	800	0	39	1 780	1 350	0
20	1 124	862	0	40	2 030	735	0

1. Kilométrage observé lors de la radiation du véhicule ou kilométrage du véhicule en service à la date de recueil des données. Les véhicules ont été classés par valeurs croissantes.
2. 0 si le moteur était d'origine au moment de l'observation ou kilométrage observé au moment du remplacement du moteur d'origine
3. 0 si le premier moteur de remplacement était en état de marche au moment de l'observation ou kilométrage observé au moment du remplacement du premier moteur de remplacement. Un tiret indique que l'information est sans objet, le moteur d'origine étant toujours en usage.
4. Les informations relatives à ces deux véhicules sont repérées par la même convention de couleur de fond de cellules dans les tableaux 42 à 44 et dans le tableau 46.

Cependant cette réponse n'utilise pas toute l'information disponible, puisque l'on ne tient pas compte de ce que sont devenus les moteurs de remplacement: l'examen du [tableau 42](#) montre que le premier moteur de remplacement du véhicule 34 a parcouru  $150\,000 - 23\,700 = 116\,300$  km et donc a été réformé sans pouvoir franchir le cap des 120 000 km, tandis que celui du véhicule 40 a parcouru  $203\,000 - 73\,500 = 129\,500$  km et qu'il fonctionnait encore au moment de la constitution du fichier. En définitive, l'échantillon est de  $17 + 2 = 19$  et l'on y enregistre  $19 - 5 - 1 = 13$  moteurs n'ayant pas supporté l'épreuve, ce qui donne une estimation de  $13/19 = 68,4\%$ . La généralisation du raisonnement conduit au [tableau 43](#).

TABLEAU 43  
Création de véhicules fictifs

Âge $t_i$ <sup>1</sup> du véhicule	État du moteur <sup>2</sup>	âge de décès du moteur de remplacement	Véhicule fictif <sup>3</sup>	Âge $t_i$ <sup>1</sup> du véhicule	État du moteur <sup>2</sup>	âge de décès du moteur de remplacement	Véhicule fictif <sup>3</sup>
477	M	477	11 (2)	920	B	?	31 (2)
556	M	118	12 (2)	913	M	656	32 (2)
386	B	?	13 (2)	590	B	?	33 (2)
290	B	?	15 (2)	1263	M	221	<b>34 (2)</b>
714	M	468	16 (2)	289	B	?	35 (2)
293	B	?	17 (2)	750	B	?	37 (2)
560	B	?	18 (2)	700	B	?	38 (2)
300	B	?	19 (2)	430	B	?	39 (2)
262	B	?	20 (2)	1295	B	?	<b>40 (2)</b>
392	B	?	23 (2)	438	B	?	12 (3)
852	M	443	25 (2)	246	B	?	16 (3)
1061	M	163	26 (2)	409	B	?	25 (3)
570	B	?	27 (2)	898	B	?	26 (3)
927	B	?	28 (2)	257	B	?	32 (3)
230	B	?	29 (2)	1042	B	?	34 (3)

1. Kilométrage parcouru par le véhicule depuis le dernier changement de moteur
2. B : moteur en état de fonctionnement lors de la constitution du fichier. M : moteur à changer.
3. suivi du rang du moteur sur le véhicule

Pour plus de facilité de traitement, on peut fusionner les informations de ces deux tableaux en les classant par âge croissant, ce qui donne le [tableau 44 de la page 248](#) dans lequel on a dressé la liste des véhicules fictifs (ceux ayant le moteur d'origine ou un moteur de remplacement), en indiquant le nombre de kilomètre qu'a effectué le véhicule fictif, sans se préoccuper du fait que son moteur a ou non été en usage jusqu'au bout et, si cette information est disponible, le kilométrage du moteur lors de sa radiation.

À partir de ce [tableau 44](#), on peut assez facilement systématiser la démarche décrite ci-dessus, pour quelques valeurs de durée de vie d'un moteur, en essayant de ne pas effectuer d'estimation de la probabilité de décès avant  $t_i$  sur des échantillons trop fiables. On obtient alors la distribution du [tableau 45 de la page 249](#).

Cela étant cette approche n'exploite pas au mieux l'information disponible, contrairement à celle s'appuyant sur la fonction de hasard cumulée, et peut conduire, comme c'est le cas ici, à ne pas respecter la propriété de non-décroissance de la fonction de répartition.

#### IV-2.2.21b) Utilisation de la fonction de hasard cumulée

La **fonction de hasard cumulée** s'établit à partir de la probabilité conditionnelle  $h(t)$ , qui peut se définir comme:  $h(t) = -[\log(1 - F(t))]'$  ([relation 42 de la](#)

[page 244](#)). On en déduit, après intégration:  $1 - F(t) = e^{\left[-\int_0^t h(u)du\right]}$  et, si l'on pose

TABLEAU 44  
Fusion des tableaux 42 et 43 (trié par âge croissant)

Véhicule fictif	Âge du véhicule	Âge du décès du moteur	État du moteur	Rang inversé	Véhicule fictif	Âge du véhicule	Âge du décès du moteur	État du moteur	Rang inversé
1 (1)	130	?	B	70	31 (2)	920	?	B	35
2 (1)	220	?	B	69	28 (2)	927	?	B	34
29 (2)	230	?	B	68	12 (1)	936	380	M	33
16 (3)	246	?	B	67	13 (1)	940	554	M	32
32 (3)	257	?	B	66	14 (1)	969	?	B	31
20 (2)	262	?	B	65	15 (1)	990	700	M	30
35 (2)	289	?	B	64	16 (1)	1027	313	M	29
15 (2)	290	?	B	63	34 (3)	1042	?	B	28
17 (2)	293	?	B	62	17 (1)	1060	767	M	27
19 (2)	300	?	B	61	26 (2)	1061	163	M	26
3 (1)	300	?	B	60	18 (1)	1070	510	M	25
4 (1)	325	?	B	59	19 (1)	1100	800	M	24
13 (2)	386	?	B	58	20 (1)	1124	862	M	23
5 (1)	390	?	B	57	21 (1)	1150	?	B	22
23 (2)	392	?	B	56	22 (1)	1183	?	B	21
25 (3)	409	?	B	55	23 (1)	1190	798	M	20
39 (2)	430	?	B	54	34 (2)	1263	221	M	19
12 (3)	438	?	B	53	40 (2)	1295	?	B	18
11 (2)	477	477	M	52	24 (1)	1298	?	B	17
6 (1)	490	?	B	51	25 (1)	1300	448	M	16
12 (2)	556	118	M	50	26 (1)	1311	250	M	15
18 (2)	560	?	B	49	27 (1)	1320	750	M	14
27 (2)	570	?	B	48	28 (1)	1366	439	M	13
33 (2)	590	?	B	47	29 (1)	1380	1150	M	12
7 (1)	590	?	B	46	30 (1)	1400	?	B	11
8 (1)	610	?	B	45	31 (1)	1420	500	M	10
9 (1)	680	?	B	44	32 (1)	1450	537	M	9
38 (2)	700	?	B	43	33 (1)	1460	870	M	8
16 (2)	714	468	M	42	34 (1)	1500	237	M	7
37 (2)	750	?	B	41	35 (1)	1513	1224	M	6
10 (1)	830	?	B	40	36 (1)	1550	?	B	5
25 (2)	852	443	M	39	37 (1)	1640	890	M	4
11 (1)	892	415	M	38	38 (1)	1700	1000	M	3
26 (3)	898	?	B	37	39 (1)	1780	1350	M	2
32 (2)	913	656	M	36	40 (1)	2030	735	M	1

Table des matières

Index thématique

$$H(t) = \int_0^t h(u)du \quad \text{relation 43}$$

on obtient alors le résultat fondamental suivant, valable pour toutes les lois de probabilités continues :

$$F(t) = 1 - e^{-H(t)} \quad \text{relation 44}$$

Il suffit donc de faire le cumul des probabilités conditionnelles de panne pour obtenir, après exponentiation, une estimation de la fonction de répartition.

TABLEAU 45  
Première estimation de  $F(t_i)$

Durée d'utilisation $t_i$ atteinte ou dépassée	Nombre $n_i$ de moteurs soumis à une durée d'utilisation $\geq t_i$	Nombre $k_i$ de moteurs soumis à une durée d'utilisation $\geq t_i$ et hors d'usage avant $t_i$	Estimation de $F(t_i) = \frac{k_i}{n_i}$
300	59	5	8,5%
400	55	7	12,7%
500	50	13	26,0%
600	45	15	33,3%
700	42	17	40,5%
800	40	21	52,5%
900	36	22	61,1%
1000	29	19	65,5%
1100	24	14	60,9%
1200	19	13	68,4%

Le tableau 46 de la page 250 reprend les informations du tableau 42 de la page 246 en classant les 70 moteurs par kilométrage croissant observé lors de la constitution de l'échantillon, que ces moteurs soient hors d'usage ou non. On en tire alors le tableau 47 de la page 251 dans lequel les moteurs en état de marche sont éliminés. Le taux de défaillance au kilométrage du moteur hors d'usage se calcule alors comme l'inverse du nombre de moteurs ayant atteint ou dépassé ce kilométrage. La fonction de hasard cumulée et la fonction de répartition figurent également dans ce tableau 47..

Table des matières

Index thématique

#### IV-2.2.3 Détermination de la durée de vie optimale

Nous supposons ici que la maintenance se borne à remplacer à l'identique chacun des composants du véhicule, lorsque ceux-ci tombent en panne. Les lois de durées de vie sont indépendantes (ou très faiblement dépendantes). On calculera donc l'espérance mathématique de la dépense actualisée de remplacement de chacun des composants, en supposant que l'on utilise le véhicule un certain nombre de kilomètres. Puis, comme dans le problème posé en univers certain, on calcule l'annuité constante équivalente à la somme des espérances mathématiques actualisées des dépenses de tous les composants, et de la dépense d'acquisition du matériel  $I_0$ , diminuée de la valeur  $V_n$  de revente actualisée du matériel d'occasion; et, comme précédemment, la durée de vie optimale est déterminée par la politique qui conduit à la plus faible annuité constante équivalente. Pour le problème posé, on a calculé une mensualité constante équivalente de préférence à l'annuité. Le véhicule utilitaire considéré parcourt en moyenne 1900 km chaque mois et met donc 5,26 mois (= 0,439 an) pour parcourir 10000 km; les calculs seront conduits pour des durées de vie égales à des multiples entiers de ces données. Nous examinerons successivement 3 problèmes: celui de la détermination de l'espérance mathématique du coût de remplacement d'un composant au cours d'une période, celui du calcul de la durée de vie optimale proprement dite, et enfin une réflexion sur les implications de l'étude de la dispersion des résultats.

TABLEAU 46

Classement des observations faites sur les 68 moteurs changés ou en état de fonctionnement des 40 véhicules du tableau 42 de la page 246

Âge $t_i$ du moteur	État <sup>1</sup>	Véhicule d'origine <sup>2</sup>	$n_i^3$	Âge $t_i$ du moteur	État <sup>1</sup>	Véhicule d'origine <sup>2</sup>	$n_i^3$	Âge $t_i$ du moteur	État <sup>1</sup>	Véhicule d'origine <sup>2</sup>	$n_i^3$
118	M	12 (2)	70	430	B	39 (2)	46	767	M	17 (1)	22
130	B	1 (1)	69	438	B	12 (3)	45	798	M	23 (1)	21
163	M	26 (2)	68	439	M	28 (1)	44	800	M	19 (1)	20
220	B	2 (1)	67	443	M	25 (2)	43	830	B	10 (1)	19
221	M	34 (2)	66	448	M	25 (1)	42	862	M	20 (1)	18
230	B	29 (2)	65	468	M	16 (2)	41	870	M	33 (1)	17
237	M	34 (1)	64	477	M	11 (2)	40	890	M	37 (1)	16
246	B	16 (3)	63	490	B	6 (1)	39	898	B	26 (3)	15
250	M	26 (1)	62	500	M	31 (1)	38	920	B	31 (2)	14
257	B	32 (3)	61	510	M	18 (1)	37	927	B	28 (2)	13
262	B	20 (2)	60	537	M	32 (1)	36	969	B	14 (1)	12
289	B	35 (2)	59	554	M	13 (1)	35	1000	M	38 (1)	11
290	B	15 (2)	58	560	B	18 (2)	34	1042	B	34 (3)	10
293	B	17 (2)	57	570	B	27 (2)	33	1150	B	21 (1)	9
300	B	3 (1)	56	590	B	7 (1)	32	1150	M	29 (1)	8
300	B	19 (2)	55	590	B	33 (2)	31	1183	B	22 (1)	7
313	M	16 (1)	54	610	B	8 (1)	30	1224	M	35 (1)	6
325	B	4 (1)	53	656	M	32 (2)	29	1295	B	40 (2)	5
380	M	12 (1)	52	680	B	9 (1)	28	1298	B	24 (1)	4
386	B	13 (2)	51	700	M	15 (1)	27	1350	M	39 (1)	3
390	B	5 (1)	50	700	B	38 (2)	26	1400	B	30 (1)	2
392	B	23 (2)	49	735	M	40 (1)	25	1550	B	36 (1)	1
409	B	25 (3)	48	750	M	27 (1)	24				
415	M	11 (1)	47	750	B	37 (2)	23				

1. B: moteur en état de fonctionnement lors de la constitution du fichier. M: moteur à changer.

2. suivi du rang du moteur sur le véhicule

3. Nombre de moteurs ayant dépassé l'âge  $t_i$  dans l'échantillon

#### IV-2.2.3.1 Détermination de l'espérance mathématique du coût de remplacement d'un composant au cours d'une période

Introduisons les notations suivantes :

- $s$ : Indice de la période au cours de laquelle le véhicule a atteint entre  $(s - 1) \times 10000$  Kilomètres et  $s \times 10000$  kilomètres. Compte tenu de l'hypothèse de production mensuelle constante,  $u$  on a  $t = 10000 s / u$ .
- $m$  : indice du numéro d'ordre d'un composant tombant en panne:  $m = 1$  pour le composant d'origine,  $m = 2$  pour le second composant (premier composant de remplacement); il s'agit toujours du même type de composant (moteur par exemple). Dans notre exemple, nous limiterons  $m$  à 5 (c'est-à-dire 4 remplacements), car le problème posé implicitement n'est pas celui de l'étude d'un régime stationnaire, mais celui d'un véhicule dont la durée de

TABLEAU 47

Construction de la fonction de hasard cumulée et de la fonction de répartition de la durée de vie du moteur

$t_i$	$n_i$	$h(t_i) = \frac{1}{n_i}$	$H(t_i) = \sum_{j=1}^i h(t_j)$	$1 - e^{-H(t_i)}$
118	70	0,01429	0,01429	1,42%
163	68	0,01471	0,02899	2,86%
221	66	0,01515	0,04414	4,32%
237	64	0,01563	0,05977	5,80%
250	62	0,01613	0,07590	7,31%
313	54	0,01852	0,09442	9,01%
380	52	0,01923	0,11365	10,74%
439	44	0,02273	0,13637	12,75%
443	43	0,02326	0,15963	14,75%
448	42	0,02381	0,18344	16,76%
468	41	0,02439	0,20783	18,77%
477	40	0,02500	0,23283	20,77%
500	38	0,02632	0,25915	22,83%
510	37	0,02703	0,28617	24,89%
537	36	0,02778	0,31395	26,94%
554	35	0,02857	0,34252	29,00%
656	29	0,03448	0,37700	31,41%
700	26	0,03846	0,41547	34,00%
735	25	0,04000	0,45547	36,58%
750	23	0,04348	0,49894	39,28%
767	22	0,04545	0,54440	41,98%
798	21	0,04762	0,59202	44,68%
800	20	0,05000	0,64202	47,38%
862	18	0,05556	0,69757	50,22%
870	17	0,05882	0,75640	53,06%
890	16	0,06250	0,81890	55,91%
1000	11	0,09091	0,90981	59,74%

Table des matières

Index thématique

vie physique est inférieure à 300000 km et que la probabilité d'user plus de 5 composants d'un même type durant la durée de vie physique maximale est tout à fait négligeable.

- $P_{ms}$ : Probabilité de réparation du composant  $m$ , au cours de la période  $s$ .
- $I_{sm}$ : Espérance de coût (=  $I_m$ ) de la réparation du composant  $m$  au cours de la période  $s$ . Lorsque l'indice  $m$  manque, c'est que la sommation sur cet indice a été effectuée.

On retiendra, en outre, l'hypothèse que les pannes se produisent nécessairement en fin de période<sup>1</sup>.

La détermination de  $P_{ms}$  s'établit par récurrence, à partir de la distribution théorique  $P_{1s}$  obtenue empiriquement (dans notre exemple, nous avons vu que la

1. Si cette hypothèse est trop forte, il faut alors utiliser des périodes d'amplitude plus faible. Dans notre exemple, on obtient pratiquement les mêmes résultats que ceux obtenus ci-après, en utilisant des périodes d'amplitude 100 fois plus faible à celle utilisée ici: les écarts trouvés sont négligeables.



Dans le problème concret qui se pose, la garantie joue pour la première période, ce qui fait que le remplacement du moteur n'est pas à la charge de l'utilisateur s'il doit être effectué au cours de cette période. On considère alors que la probabilité  $P_{1,1}$  est nulle. On obtient alors :

$$P_{2,2} = 0 \cdot 0$$

$$P_{2,3} = 0 \times 0,0088 + 0,0088 \times 0 = 0$$

$$P_{2,4} = 0 \times 0,0194 + 0,0088 \times 0,0088 + 0,0194 \times 0 = 0,000077$$

$$P_{2,5} = 0 \times 0,0323 + 0,0088 \times 0,0194 + 0,0194 \times 0,0088 + 0,0323 \times 0 = 0,000341$$

$$P_{2,6} = 0 \times 0,0462 + 0,0088 \times 0,0323 + 0,0194 \times 0,0194 + 0,0323 \times 0,0088 + 0,0462 \times 0 = 0,000945$$

etc., d'où le **tableau 49** où les résultats sont donnés avec une précision de 1/10000.

**TABLEAU 49**  
*Exemple numérique de calcul de probabilité de l'âge du véhicule au second remplacement*

$s$	2	3	4	5	6	7	...
$P_{2s}$	0	0	0,0001	0,0003	0,0009	0,0021	...

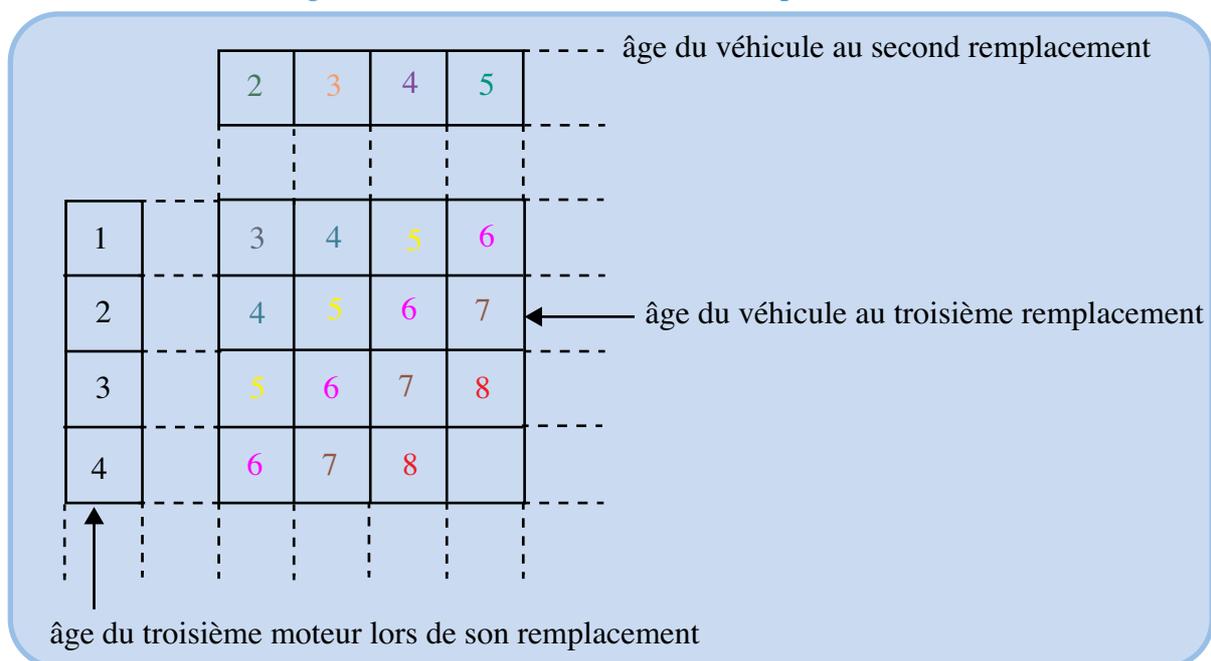
Table des matières

*IV-2.2.31b) Détermination de la probabilité  $P_{3s}$  qu'une panne de rang 3 se produise au cours de la période  $s$*

Le raisonnement généralise celui qui vient d'être présenté. Le tableau de la **figure 62 de la page 253** donne l'âge du véhicule lorsque trois remplacements du moteur se sont produits, et ce, pour les différentes durées de vie possibles du composant considéré.

Index thématique

**FIGURE 62**  
*Âge du véhicule au troisième remplacement*



Il est facile d'établir :

$$P_{3,s} = \sum_{j=1}^{s-2} P_{2,s-j} \cdot P_{1,j} \quad \text{relation 46}$$

L'application de cette relation 46 à notre exemple numérique conduit au tableau 50.

TABLEAU 50  
Exemple numérique de calcul de probabilité de l'âge du véhicule au deuxième remplacement

s	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_{3,s}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0005

#### IV-2.2.31c) Cas général

Par récurrence, on montre que :

$$P_{ms} = \sum_{j=1}^{s+1-m} P_{1j} \cdot P_{m-1,s-j} \quad \text{relation 47}$$

D'où le tableau 51 qui donne la distribution de probabilité de l'âge du véhicule lors du remplacement d'un premier moteur, d'un deuxième moteur, ..., d'un cinquième moteur. Les deux dernières lignes du tableau seront expliquées ultérieurement.

TABLEAU 51  
Établissement de la distribution de probabilité (‰) du remplacement d'un moteur selon l'âge du véhicule

$\begin{matrix} s \\ k \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0,0	8,8	19,4	32,3	46,2	59,9	72,2	81,9	88,2	90,5	88,6	83,0	74,5	64,1	52,7	41,5	31,3	22,6	15,5
2	0,0	0,0	0,0	0,1	0,3	0,9	2,1	3,9	6,6	10,2	14,9	20,6	27,0	33,9	41,0	47,8	54,0	59,1	62,9
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,3	0,5	0,9	1,6	2,6	3,9	5,7	7,9	10,7
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,2	0,4
5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$P_{.s}$	0,0	8,8	19,4	32,3	46,5	60,9	74,3	85,9	94,8	100,8	103,8	104,1	102,5	99,6	96,3	93,3	91,1	89,0	89,6
$\bar{P}_{.s}^{-1}$	0,0	8,5	18,4	30,0	42,2	54,1	64,6	73,0	79,0	82,2	82,8	81,3	78,3	74,5	70,5	66,9	63,9	61,7	60,1

1. Actualisation à 5% / an de  $P_{.s}$ .

#### IV-2.2.31d) Calcul de l'espérance mathématique du nombre de composants à changer au cours d'une période

Si un moteur est changé au cours d'une période quelconque  $k$ , il s'agit soit du moteur d'origine, soit du premier moteur remplacé, soit du second moteur remplacé... On peut alors utiliser le théorème des probabilités totales dans le cas d'événements exclusifs, et on obtient alors la probabilité  $P_{.s}$  e qu'un moteur (de rang quelconque) tombe hors d'usage à partir de la relation 48.

$$P_{.s} = \sum_{m=1}^s \sum_{j=1}^{s+1-m} P_{1j} \cdot P_{m-1, s-j} \quad \text{relation 48}$$

L'espérance mathématique du nombre de moteurs en panne au cours de la période  $s$  est la moyenne de la loi binomiale  $\mathcal{B}(n = 1, p = P_{.s})$ , c'est-à-dire  $P_{.s}$ .

#### IV-2.2.3.2 Détermination de la durée de vie optimale

L'espérance de coût de remplacement du moteur de coût  $I_j$  au cours de la période  $s$  est:  $I_j \cdot P_{.s}$ . La valeur actualisée de ce coût est (la date à laquelle les  $s \cdot 10000$  km sont atteints étant  $t = 10000 s/u / 12$ , où  $u$  est le kilométrage mensuel):

$$I_j \cdot P_{.s} (1 + \alpha)^{-t}$$

Si l'on garde le véhicule  $n$  périodes, la dépense actualisée de remplacement de moteur au cours de ces  $n$  périodes est alors:

$$\sum_{s=1}^n I_j \cdot P_{.s} (1 + \alpha)^{-t} = I_j \sum_{s=1}^n P_{.s} \cdot (1 + \alpha)^{-t} \text{ avec } t = \frac{10000s}{12u} \quad \text{relation 49}$$

Pour faciliter les calculs, la dernière ligne du **tableau 51** fournit la valeur actualisée des probabilités  $P_{.s}$ .

Il ne reste plus qu'à cumuler les dépenses actualisées des différents composants  $j$ , et à tenir compte de la valeur de revente  $V_n$  (dont la détermination n'est pas toujours des plus faciles) pour calculer la mensualité constante équivalente  $M_n$  associée à un renouvellement du véhicule tous les  $10000 \times n$  kilomètres:

$$M_n = \left[ I_0 - V_n (1 + \alpha)^{-n} + \sum_j I_j \sum_{s=1}^n P_{.s} \cdot (1 + \alpha)^{-t} \right] \frac{\alpha_{12}}{1 - (1 + \alpha_{12})^{-m}}, \text{ avec:}$$

$m = \frac{10000 \cdot n}{12 \cdot u}$  = nombre de mois d'utilisation et  $\alpha_{12} = (1 + \alpha)^{1/12} - 1$  = taux mensuel équivalent au taux annuel  $\alpha$ .

Dans le cas traité, les mensualités constantes équivalentes du véhicule **Volnault** sont (en dollars liduriens) et pour le taux réel d'actualisation de 5% (on ne tiendra pas compte pour l'instant de la dernière ligne):

**TABLEAU 52**  
*Calcul des mensualités constantes équivalentes d'utilisation du véhicule en fonction de l'âge de radiation du véhicule*

$s$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$M_n$	951	633	521	470	444	430	419	408	395	384
$\sigma_n$	35	40	43	44	44	41	35	28	25	24

Il ressort de ce tableau qu'il y a intérêt à faire durer le plus longtemps possible le véhicule. Cette observation doit être tempérée par le fait que n'est pris en compte dans l'étude qu'un nombre limité de composants (embrayage moteur, cardans, boîte de vitesses et freins) mais qui correspondent aux « grosses

Table des matières

Index thématique

dépenses». Des dépenses mineures (remplacement d'un moteur de lave-glace, par exemple) sont d'un poids sans doute plus important lorsque le véhicule vieillit et il est sans doute raisonnable de considérer qu'au-delà de 150000 km il y a une sous-estimation de la dépense (cependant 10 dollars liduriens d'écart par mois pour un véhicule utilisé sur 160000 km représentent une valeur actualisée de 711 dollars).

Il faut enfin noter que le choix de garder un véhicule 150000 km par exemple, ne veut pas dire que sa radiation aura lieu nécessairement à cette date: un véhicule en état de marche en franchissant ce cap sera gardé tant qu'une panne d'un composant majeur ne l'aura pas immobilisé, et réciproquement un véhicule tombé en panne peu avant ce kilomètre sera radié avec anticipation. Dans ce dernier cas, le calcul économique permet de dire, lorsqu'un composant tombe en panne, et compte tenu de l'âge des autres composants, s'il est intéressant ou non de procéder au remplacement (en comparant l'espérance mathématique du coût d'entretien après réparation avec la mensualité constante équivalente trouvée dans la stratégie optimale).

#### IV-2.2.3.3 Le problème de la dispersion des résultats

En univers aléatoire, il est insuffisant de juger sur le seul critère du coût (ou de rentabilité). Le raisonnement décrit à la page 199, en application de la théorie financière moderne, montre qu'il est indispensable de faire intervenir en outre, dans le choix d'un investissement, la dispersion des résultats obtenus pour, le cas échéant, effectuer un arbitrage entre rentabilité et risque.

La dépense actualisée d'une chaîne infinie de véhicules de durée de vie  $n$ , est une variable aléatoire dont on a considéré l'espérance mathématique (rappelons que  $M_n$  est égal au produit de cette espérance par le taux d'actualisation), mais qui peut également se caractériser par sa dispersion.

On prendra comme paramètre de dispersion  $\sigma_n^2$ , le produit de la variance  $\sigma^2$  des dépenses de la chaîne infinie par le taux d'actualisation mensuel, afin de pouvoir comparer plus facilement  $\sigma_n^2$  et  $M_n$ . Si un accroissement de durée de vie  $n_2 - n_1$  se traduit par une diminution de la mensualité constante équivalente ( $M_{n_2} < M_{n_1}$ ), mais s'accompagne simultanément d'un accroissement de la dispersion des dépenses  $\sigma_{n_2}^2 > \sigma_{n_1}^2$ , un arbitrage devra être opéré entre les notions d'espérance et de risque.

#### IV-2.2.33a) Calcul de $\sigma^2$

Deux propriétés classiques facilitent le calcul:

- Tout d'abord, on sait que la variance d'une somme de variables aléatoires *indépendantes* est égale à la somme des variances de ces variables aléatoires. Puisque l'on a considéré les cinq types de pannes comme indépendantes, la variance des dépenses totales sera égale à la somme des variances relatives à chacune des pannes.
- Deuxièmement, la variance des dépenses peut se calculer comme l'espérance mathématique des carrés des dépenses, diminuée du carré de l'espérance mathématique des dépenses.

Le problème se ramène donc au calcul de l'espérance mathématique des carrés des dépenses. Pour des raisons d'homogénéité, il est nécessaire d'y ajouter le carré de la dépense nette<sup>1</sup> d'acquisition du véhicule, dès lors que ce poste figure dans le calcul de l'espérance mathématique des dépenses.

Pour un type de panne quelconque, compte tenu des hypothèses retenues, on peut avoir de 1 à 5 remplacements. Le calcul de l'espérance des carrés s'établit progressivement, en *partitionnant* la variable aléatoire en 5 sous-ensembles.

- **Un seul remplacement est opéré.** Chaque période  $t$  ( $1 \leq t \leq n$ ) est caractérisée par la dépense  $I_t$  et la probabilité qui lui est associée est égale au produit de la probabilité de l'occurrence d'une panne au cours de la période  $t$  par celle qu'aucune panne se produise au cours des  $n - t$  périodes suivantes :

$$p_{1t} \cdot \left( 1 - \sum_{i=1}^{n-t} p_{1i} \right)$$

On en déduit une première somme de carrés  $S_1$ , constitutive de  $\sigma^2$  :

$$S_1 = \sum_{t=1}^n \bar{I}_t^2 p_{1t} \cdot \left( 1 - \sum_{i=1}^{n-t} p_{1i} \right)$$

- **Deux remplacements sont opérés.** Un premier remplacement est opéré au cours de la période  $t$ , et un second au cours de la période  $u$ . La dépense effectuée est donc :  $(\bar{I}_t + \bar{I}_u)$ . La probabilité associée à cette dépense est égale au produit de la probabilité que la panne se produise en période  $t$ , par celle qu'elle se produise en période  $(u - t)$ , puisque 2 pannes successives sont indépendantes, multiplié par la probabilité qu'aucune panne ne survienne au cours des  $(n - u)$  périodes suivantes. Elle est donc égale à :

$$[p_{1t} \cdot p_{1(u-t)}] \left( 1 - \sum_{v=1}^{n-u} p_{1v} \right)$$

On en déduit une seconde somme de carrés  $S_2$ , à ajouter à la précédente dans le calcul de  $\sigma^2$  :

$$S_2 = \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{u=t+1}^n (\bar{I}_t + \bar{I}_u)^2 p_{1t} \cdot p_{1(u-t)} \left( 1 - \sum_{v=1}^{n-u} p_{1v} \right)$$

- **k remplacements sont opérés.** Le premier remplacement est opéré au cours de la période  $t_1$ , le second au cours de la période  $t_2$ , ..., le  $k^{\text{ième}}$  au cours de la période  $k$ . La dépense effectuée est donc :

$$\sum_{i=1}^k \bar{I}_{t_i} \text{ avec } t_i < t_{i+1} \leq n$$

Il est facile de montrer par récurrence, une fois établi le calcul du point précédent, que la probabilité associée à cette dépense est :

$$\left[ p_{1t_1} \cdot \prod_{i=2}^k p_{1(t_i - t_{i-1})} \right] \left( 1 - \sum_{v=1}^{n-t_k} p_{1v} \right)$$

1. = valeur d'achat diminuée de la valeur actualisée de la valeur de revente à la fin de la période  $n$ .

La somme  $S_k$  à ajouter aux précédentes, pour le calcul de  $\sigma^2$  est donc :

$$S_k = \sum_{t_1=1}^{n-k} \left\{ p_{1k} \left[ \prod_{i=2}^k p_{1(t_i-t_{j-1})} \right] \cdot \left[ 1 - \sum_{v=1}^{n-t_k} p_{1v} \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^k \bar{I}_{t_i} \right]^2 \right\} \quad \text{relation 50}$$

Le calcul de  $\sigma^2$  s'en déduit aisément car on a :

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^5 S_k - (\alpha_{12} M_n)^2 \quad \text{relation 51}$$

#### IV-2.2.33b) Analyse des résultats

La comparaison des coûts et de leur dispersion (voir le [tableau 52 de la page 255](#) et la [figure 63](#)) montre que seules les politiques consistant à garder le véhicule plus de 100000 km sont efficaces. Autrement dit, pour une même dispersion des résultats (= risque encouru), il est toujours plus intéressant, parce que moins coûteux, de retenir la politique qui conduit à la durée de vie la plus longue.

FIGURE 63

*Arbitrage « coût – risque » de la dépense mensuelle d'utilisation d'un véhicule en fonction de sa durée de conservation*

