Nejla Nouaili et Denis Pasquignon
Université Paris-Dauphine

OPTIMISATION, LSO 1

Nejla Nouaili et Denis Pasquignon, Université Paris-Dauphine

OPTIMISATION, LSO 1

Nejla Nouaili et Denis Pasquignon
Université Paris-Dauphine

TABLE DES MATIÈRES

1. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ 2
1. Définition 2
2. $\mathbb{R}^n$ comme ensemble de vecteurs 2
3. $\mathbb{R}^n$ comme ensemble de points 5
4. Exercices 7

2. Topologie dans $\mathbb{R}^n$ 8
1. Boules 8
2. Ouverts, fermés 9
3. Sous ensembles bornés - Compacts 11
4. Convexe 11
5. Exercices 11

3. Fonctions de plusieurs variables 13
1. Fonctions de n variables 13
2. Domaine de définition 14
3. Courbes de niveau 14
4. Graphes 15
5. Continuité 15
6. Exercices 15

4. Dérivée partielle première 17
1. Définitions 17
2. Fonctions de classe C^1 19
3. Développement limité d'ordre 1 19
4. Plan tangent 23
5. Exercices 25

5. Dérivée partielle seconde 26
1. Fonctions dérivées partielles secondes 26
2. Fonctions de classe $\mathbb{C}^2$ 27
3. Développement limité d'ordre 2 27
4. Position par rapport au plan tangent 29
5. Exercices 31

6. Fonctions convexes ou concaves de deux variables 32
1. Définition 32
2. Propriétés des fonctions convexes ou concaves 33
3. Exercices 34

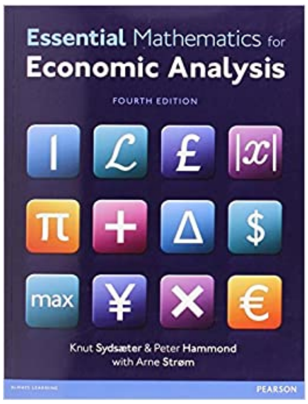
7. Extrema libres pour deux variables 36
1. Extremum 36
2. Conditions nécessaires ou conditions du premier ordre 36
3. Nature des points critiques 37

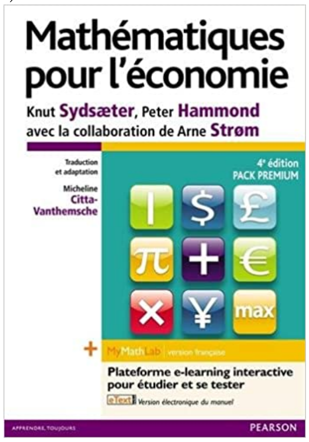
4. Cas où f est convexe 38
5. Exercices 38

8. Extrema lies 40
1. Définitions 40
2. Cas d'une liaison explicite 40
3. Conditions nécessaires ou conditions du premier ordre 41
4. Conditions suffisantes 43
5. Optimisation sur un compact 45
6. Exercices 46

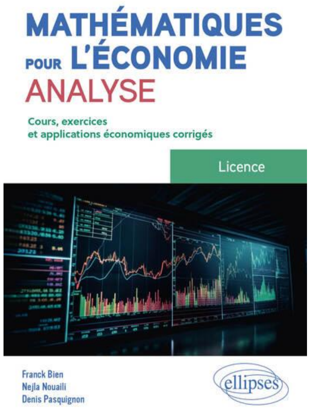
Avertissement

Ce document est issu d'un support de cours d'Optimisation et doit beaucoup au
— polycopiés de de K.Meziani, V.Speller er D.Pasquignon
— Livre suivant (en anglais et traduit en français)





— Livre de F.Bien, N.Nouaili et D.Pasquignon



Il reste sans aucun doute beaucoup d'erreurs et de coquilles. N'hésitez pas à nous les signaler.

CHAPITRE 1

L'ENSEMBLE $\mathbb{R}^n$

1. Définition

Définition 1.1

Un élément x de $\mathbb{R}^n$ est une liste ordonnée de n nombre réels appelé n-uplet.

$$x = (x_1, \cdots, x_n)$$

où $x_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq n$, x_i s'appelle la i^{ieme} composante de x.

Un tel n-uplet peut aussi s'écrire en colonne

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Remarque L'ordre des composantes est important, ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un élément x de $\mathbb{R}^n$ peut être considéré

— comme **un vecteur**, on le note avec une flèche au-dessus

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

On dit que $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel.

— comme **un point**, on le note M en majuscule

$$M = (x_1, \cdots, x_n)$$

On dit que $\mathbb{R}^n$ est un espace affine.

Il faut distinguer la notion de vecteur, qui se résume à une direction, un sens et une longueur, de la notion de point. Un point M est parfaitement localisé tandis que le vecteur n'a pas une représentation unique. Nous détaillons ces deux aspects de $\mathbb{R}^n$.

2. $\mathbb{R}^n$ comme ensemble de vecteurs

2.1. Opérations sur les vecteurs. — On a

Proposition 1.2 – Egalités de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si toutes les composantes sont égales.

$$\vec{x} = \vec{y} \Longleftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \;\; x_i = y_i.$$

Remarque L'ordre des composantes est important, ainsi $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Définition 1.3 – Somme et produit par un réel

Soit deux vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et a un réel

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix} \text{ et } a\,\vec{x} = \begin{pmatrix}ax_1\\\vdots\\ax_n\end{pmatrix}$$

Exemple $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

Remarque On note $-\vec{x}$ le vecteur $(-1)\vec{x}$

Proposition 1.4

— **Propriétés de l'addition**
Pour tous vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$
— $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) = (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$,
— $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$,
— $\vec{x}+\vec{0} = \vec{x}$,
— $\vec{x}+(-\vec{x}) = \vec{0}$.

— **Propriétés du produit par un scalaire**
Pour tous vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et tous réels λ et μ
— $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x} = \mu(\lambda\vec{x})$,
— $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$,
— $(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$,
— $1\vec{x} = \vec{x}$, $0\vec{x} = \vec{0}$ *et* $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

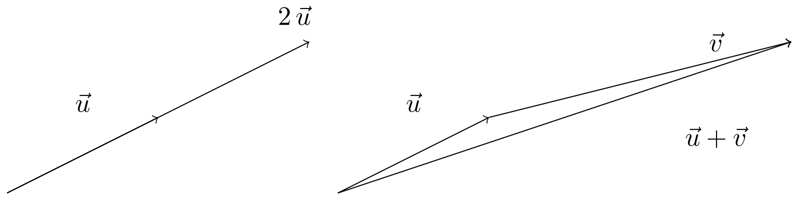
2.2. Représentation graphique dans $\mathbb{R}^2$. — Dans $\mathbb{R}^2$, un vecteur , noté $\vec{u}$, correspond à un déplacement, il est donc caractérisé par une direction, un sens et une longueur.

Pour représenter un vecteur, on munit le plan d'un repère orthonormé. Par exemple, les vecteurs $\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{e_1}$ correspond à l'axe horizontal et le vecteur $\vec{e_2}$ à l'axe vertical. On dit que la famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'écrit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}.$$

A tout vecteur $\vec{x}$ on associe le point M du plan où x_1 est l'abscisse de M et x_2 l'ordonnée de M. Alors le vecteur $\vec{x}$ est représenté par le vecteur $\vec{OM}$.
En choisissant de représenter tous les couples de $\mathbb{R}^2$ par des vecteurs d'origine O, les opérations définies dans le paragraphe précédent se représentent géométriquement :

2.3. Le produit scalaire. — On a la définition suivante.



(A) produit par un réel

(B) somme de vecteurs

Définition 1.5 – Produit scalaire

Soit n un entier naturel non nul, soit $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $\vec{v} = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on appelle *produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$* le nombre **réel**, noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ défini par :

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i, \\ &= x_1\, y_1, + x_2\, y_2 + ... + x_n\, y_n. \end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Remarque Pour $n = 3$ et pour tout $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et tout $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3.$$

De même pour $n = 2$ et pour tout $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et tout $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1\, y_1 + x_2\, y_2.$$

Remarque Le produit scalaire est ainsi nommé car il associe à deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$) un nombre réel (appelé aussi un scalaire).
Remarque Le produit salaire permet de positionner un vecteur par rapport à un autre.
Exemple l'exemple du consommateur. Si on note, pour $i = 1$ ou 2, p_i le prix unitaire du bien X_i, la dépense du consommateur est donc :

$$D(x_1, x_2) = p_1\, x_1 + p_2\, x_2.$$

En notant $x = (x_1, x_2)$ et $p = (p_1, p_2)$, on peut écrire $D(x) = \langle p, x \rangle$. p est appelé *vecteur prix.*

Définition 1.6 – Norme euclidienne

Soit n un entier naturel non nul, soit $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on appelle *norme euclidienne de $\vec{u}$* le nombre **réel**, noté $||\vec{u}||$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Remarque Pour $n = 3$ et pour tout $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

De même pour $n = 2$ et pour tout $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Remarque La norme d'un vecteur correspond à sa longueur.

Proposition 1.7 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|.$$

Il y a égalité si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires c'est-à-dire s'il existe un réel a tel que $\vec{x} = a\vec{y}$ ou $\vec{y} = a\vec{x}$.

3. $\mathbb{R}^n$ comme ensemble de points

3.1. Lien avec les vecteurs. — Etant donné deux points distincts A et B de $\mathbb{R}^n$, on peut considérer le vecteur déplacement de A vers B, de direction la droite (AB), de sens de A vers B et de longueur AB. On note

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}.$$

Si A et B sont confondus, $\vec{u}$ est le vecteur nul.

Ainsi pour signifier que le déplacement $\vec{u}$ à partir du point A amène au point B, on écrit

$$B = A + \vec{u}.$$

La distance ou la longueur entre deux points A et B, notée $d(A, B)$, est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

3.2. Droites affines. — On a

Définition 1.8 – droite affine

On appelle droite affine notée $\mathcal{D}_{A,\vec{u}}$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{u} \neq 0$ l'ensemble

$$\{M \in \mathbb{R}^n, \;\; \exists \lambda \in \mathbb{R}, \;\; \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}\}.$$

Remarque On a aussi $M = A + \lambda\vec{u}$ pour exprimer $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$. Cette écriture s'appelle une paramétrisation de la droite affine $\mathcal{D}_{A,\vec{u}}$.

Proposition 1.9 – Equation cartésienne d'une droite

Soit $\mathcal{D}_{A,\vec{u}}$ une droite affine, alors il existe 3 réels a, b, c avec a, b non tous nuls

$$\forall M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \;\; M \in \mathcal{D}_{A,\vec{u}} \iff ax + by + c = 0.$$

Définition 1.10 – segment

On appelle segment notée $[AB]$ l'ensemble
$$[AB] = \{M \in \mathbb{R}^n \ \ \exists \lambda \in [0,1], \ \ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}\}.$$

Remarque On a aussi $M = A + \lambda \overrightarrow{AB}$. Lorsque $\lambda = 0$, M est en A, puis lorsque $\lambda = 1$, le point M est en B, et lorsque λ est strictement compris entre 0 et 1, le point M est entre A et B. Ainsi pour $\lambda = 1/2$, M est au milieu dyu segment $[AB]$.

Pour $n = 2$, on peut associer à une droite une équation cartésienne que nous avons étudié au chapitre 1.

3.3. Plans affines. — On a

Définition 1.11 – Plan affine

On appelle plan affine notée $\mathcal{P}_{A,\vec{u},\vec{v}}$, où les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, l'ensemble
$$\{M \in \mathbb{R}^n, \ \ \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \ \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}\}.$$

Remarque On a aussi $M = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$. Cette écriture s'appelle une paramétrisation du plan affine $\mathcal{P}_{A,\vec{u},\vec{v}}$.

Proposition 1.12 – Equation cartésienne d'un plan affine dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathcal{P}_{A,\vec{u},\vec{v}}$ un plan affine, alors il existe 4 réels a, b, c, d avec a, b, c non tous nuls

$$\forall M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ \ M \in \mathcal{P}_{A,\vec{u},\vec{v}} \Longleftrightarrow ax + by + cz + d = 0.$$

Remarque Les réels a, b, c, d ne sont pas uniques. C'est la raison pour laquelle on dit une équation cartésienne.

3.4. Cercles et sphères. — On a

Définition 1.13 – Sphères

Soit A un point de $\mathbb{R}^n$ et r un réel positif, la spère de centre A et de rayon r, notée $S_{A,r}$, est l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^n$ tels que $d(A, M) = r$.

Remarque Lorsque $n = 2$, on appelle sphère un cercle que l'on note $C_{A,r}$. Dans ce cas si $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, alots

$$\forall M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ \ M \in C_{A,r} \Longleftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2.$$

4. Exercices

Exercice 1.1. — On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère les points $P = (1, 2)$ et $Q = (2, 1)$.

1. Placer les points P et Q dans le plan.
2. Déterminer le vecteur x tel que $P = Q + x$.
3. Calculer la distance de P à Q
4. Soit le vecteur $y = (1, 3)$, Calculer le produit scalaire de x et y ainsi que les normes de x et de y.
5. Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1.2. — On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite D_1 passant par les points $A = (2, -3)$ et $B = (4, -5)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite D_2 passant par le point $C = (-1, 3)$ et orthogonale au vecteur $v = (-3, 2)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite D_3 passant par le point $D = (1, -3)$ et de vecteur directeur $w = (-2, -5)$.
4. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $(-1, 2)$ et de rayon 5.

Exercice 1.3. — On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite P_1 passant par les points $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, -1, -1)$ et $C = (-1, 1, 0)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite P_2 passant par le point $D = (0, -1, 3)$ et orthogonal au vecteur $v = (1, -3, 2)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $(-1, 2, 3)$ et de rayon 2.

Exercice 1.4. — **(CC1 février 2019)**

1. Soient $A = (-1, 1)$, $B = (2, -2)$ et $C = (-1, 2)$ trois points de $\mathbb{R}^2$. Soit λ un réel non nul.
   (a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (c) Montrer que les coordonnées de tous les vecteurs w orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$ sont de la forme $w = (\lambda, \lambda)$.
   (d) Soit $ax + by + c = 0$ l'équation d'une droite de $\mathbb{R}^2$, donner l'expression de toutes les droites qui admettent $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur orthogonal.
   (e) Soit $ax + by + c = 0$ l'équation d'une droite de $\mathbb{R}^2$, donner l'expression de toutes les droites qui admettent $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur.
   (f) Donner l'équation du cercle $C(A, 1)$ de centre A et de rayon 1.
   (g) Donner l'equation cartésienne de la tangente au cercle $C(A, 1)$ au point C
2. Donner l'équation cartésienne du plan passant par $D = (0, 1, -1)$, $E = (1, -1, 0)$ et $F = (1, 1, -1)$. Proposer v un vecteur orthogonal à ce plan.

CHAPITRE 2

TOPOLOGIE DANS $\mathbb{R}^n$

On considère $\mathbb{R}^n$ comme un ensemble de points et nous allons étudier des propriétés de ces ensembles de points .

1. Boules

Dans $\mathbb{R}$, la distance entre deux réel x et x_0 est la valeur absolue de la différence en utilisant le cas particulier $n = 1$

$$d(x_0, x) = \sqrt{(x - x_0)^2} = |x - x_0| .$$

Prenons un intervalle ouvert $]a, b[$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$, on pose $x_0 = \frac{a+b}{2}$, et $r = \frac{b-a}{2}$, ainsi x_0 est le milieu de l'intervalle et r est un réel positif représentant la demi-longueur de l'intervalle, on en déduit une nouvelle définition d'intervalle que l'on va pouvoir étendre à $\mathbb{R}^n$:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, \ \ d(x_0, x) < r\}.$$

De même pour un intervalle fermé $[a, b]$, on a

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, \ \ d(x_0, x) \leq r\}.$$

La seule différence vient de l'inégalité stricte dans la définition d'intervalle ouvert et large pour intervalle fermé.

Définition 2.1 – Boule ouverte et Boule fermée

Soient r un réel positif et $A \in \mathbb{R}^n$.
On appelle boule ouverte de centre A et de rayon r, notée $B_o(A, r)$, le sous-ensemble :

$$B_o(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(A, M) < r\} = \{M \in \mathbb{R}^2 \quad \|\overrightarrow{AM}\| \ < r\}.$$

On appelle boule fermé de centre A et de rayon r, notée $B_f(A, r)$, le sous-ensemble :

$$B_f(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(A, M) \leq r\} = \{M \in \mathbb{R}^2 \quad \|\overrightarrow{AM}\| \ \leq r\}.$$

Remarque Dans le cas où $r = 0$, alors la boule ouverte est l'ensemble vide tandis que la boule fermé est réduite au point A:

$$B_o(A, 0) = \emptyset, \text{ et } B_f(A, 0) = \{A\}.$$

Dans le cas où $n = 2$, soit $A = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$ et $r \geq 0$, la définition devient pour une boule ouverte

$$\forall M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \ M \in B_o(A, r) \Longleftrightarrow (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < r^2.$$

FIGURE 1. Disque du plan

et pour une boule fermée

$$\forall M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad M \in B_f(A, r) \Longleftrightarrow (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 \leq r^2.$$

Ainsi une boule ouverte ou fermé est un disque qui contient ou non le bord du disque c'est-à-dire le cercle de centre A et de rayon r.

2. Ouverts, fermés

Définition 2.2

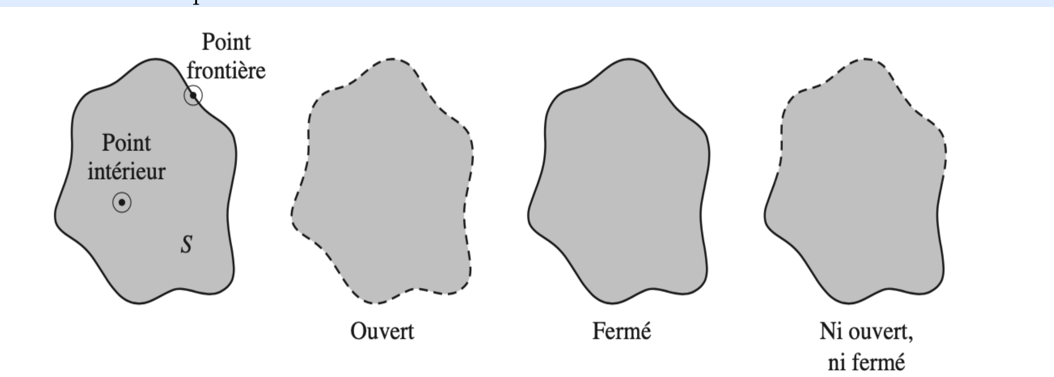
Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$.
D est *une partie ouverte* ou *un ouvert* si D est vide ou pour tout point M de D, il existe une boule ouverte de centre M et de rayon $r > 0$ contenue dans D :

$$D \text{ est un ouvert non vide} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall M \in D, \exists\, r > 0,\ B_o(M, r) \subset D.$$

D est *une partie fermée* ou *un fermé* si son complémentaire est un ouvert.

Définition 2.3

— **Un point** (a, b) **est appelé point intérieur d'un ensemble** S **du plan** s'il existe un disque centré en (a, b) tel que tous les points strictement intérieurs au disque appartiennent à S (voir la figure ci dessous).
— **Un ensemble est dit ouvert** si tous ses points sont des points intérieurs (voir le deuxième ensemble illustreé à la figure ce dessous, où les points frontières qui appartiennent à l'ensemble se trouvent sur une ligne continue et ceux qui n'y appartiennent pas sur une ligne en pointillés.)
— **Le point** (a, b) **est appelé point frontière d'un ensemble** S si tout disque centré en (a, b) contient des points de S et des points en dehors de S, comme illustré dans la première figure.
Un point frontière de S n'appartient pas nécessairement à S.
— **Lorsque** S **contient tous ses points frontières, alors** S **est dit fermé** (voir le troisième ensemble de la figure). Remarquez qu'un ensemble peut contenir certains de ses points frontières, mais pas tous, c'est le cas de la dernière image de la figure. Un tel ensemble n'est ni ouvert, ni fermé. En fait, un ensemble est fermé si et seulement si son complément est ouvert.

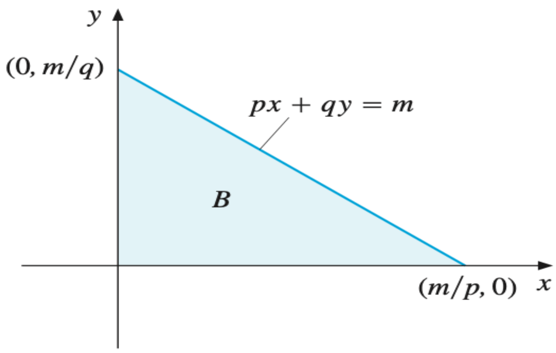


Remarque De manière plus intuitive, un ensemble D est un ouvert si D ne contient pas son bord ou sa frontière.
Remarque Un ensemble D peut être ni ouvert ni fermé.
Remarque

Dans la plupart des problèmes d'optimisation envisagés en science économique, les ensembles sont définis par une ou plusieurs inégalités et les points frontières interviennent lorsqu'une ou plusieurs de ces inégalités sont non strictes. Par exemple, en supposant que p, q et m sont des paramètres strictement positifs, l'ensemble (de budget) des points $(x; y)$ qui satisfait aux inégalités

$$px + qy \leq m, \; x \geq 0, \; y \geq 0.$$

est un ensemble fermé. Cet ensemble a la forme d'un triangle, comme le montre la figure suivante



Sa frontière se compose des trois côtés du triangle. Chacun de ces trois côtés correspond au cas d'égalité de chacune des inégalités non strictes.
En revanche, si on remplaçait dans les trois inégalités non strictes par des inégalités strictes, l'ensemble serait ouvert. En règle générale, si $g(x, y)$ est une fonction continue et c un nombre réel, alors les ensembles

$$\{(x, y) : g(x, y) \geq c\}, \; \{(x, y) : g(x, y) \leq c\} \text{ et } \{(x, y) : g(x, y) = c\}$$

son tous fermés. Si $\geq$ est remplacé par $>$, ou $\leq$ par $<$, ou $=$ par $\neq$, l'ensemble correspondant devient ouvert.
Exemple

1. R^2 et $\emptyset$ sont les seuls ensembles ouverts et fermés.
2. Une boule ouverte est une partie ouverte.
3. Une boule fermée est une partie fermée.
4. Une partie réduite à un point est fermée car on peut écrire $\{A\} = B_f(A, 0)$.
5. $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est un ouvert (puisque son complémentaire est fermé).
6. Toute partie, définie à l'aide de fonction(s) continue(s) (par exemple un ou des polynôme(s)) et par une ou des inégalités strictes est une partie ouverte.
7. Toute partie, définie à l'aide de fonction(s) continue(s) et par une ou des inégalités larges (ou des égalités) est une partie fermée. En particulier :
   — Tout demi-plan de $\mathbb{R}^2$ défini par une inégalité stricte est un ouvert.
   — Tout demi-plan de $\mathbb{R}^2$ défini par une inégalité large est un fermé.
   — Toute droite de $\mathbb{R}^2$ est un fermé.
   — Tout cercle de $\mathbb{R}^2$ est un fermé.
8. Le produit cartésien de deux intervalles ouverts (resp. fermés) est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (resp. fermé).

3. Sous ensembles bornés - Compacts

Définition 2.4

Une partie D de R^2 est *une partie bornée ou un sous-ensemble borné* si on peut inclure D dans une boule (fermée ou ouverte)

Exemple Toute boule (ouverte ou fermée sont des parties bornées puisque ces sous-ensembles sont inclus dans la boule ferrmée de même rayon.
Exemple $E = [-2,3]\times]-3,2]$ est un borné de $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.5

Une partie D de R^n est *une partie compacte ou un compact* de R^n si D est un ensemble fermé et borné.

Exemple Toute boule fermée est un compact de $\mathbb{R}^n$.

4. Convexe

Définition 2.6

Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$.
D est *une partie convexe* ou *un convexe* si D est vide ou pour tous points A et B de D, le segment $[AB]$ est inclus dans D

$$D \text{ est un convexe non vide} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (A,B) \in D \times D,\ [AB] \subset D.$$

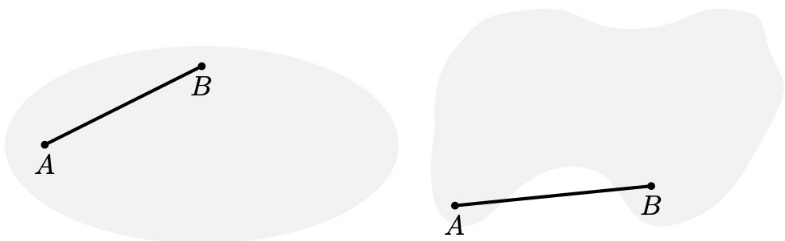


FIGURE 9.6. L'ensemble convexe est à gauche puisque pour tous points A et B de cet ensemble, le segment $[AB]$ est inclus dans l'ensemble tandis que l'ensemble à droite est non convexe. En effet il existe deux points A et B tels que le segment $[AB]$ ne soit pas inclus dans l'ensemble.

Exemple Toute boule ouverte ou fermée est un convexe de $\mathbb{R}^n$.

5. Exercices

Exercice 2.1. — Représenter graphiquement les ensembles suivants dans un plan muni d'un repère orthonormé. Sont-ils ouverts, fermés, ni l'un ni l'autre? Sont-ils compacts? Sont-ils convexes? Sont-ils bornés ?

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ 2x + y + 1 > 0 \text{ et } x + 2y - 2 \geq 0 \right\}.$$

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x + y > 0 \text{ et } -1 < x < 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 2 \right\}.$$

Exercice 2.2. — Un consommateur dispose de 2 biens X et Y dont les prix unitaires sont p et q. Le revenu du consommateur est R. On suppose $p > 0$, $q > 0$, $R > 0$ et les quantités consommées $x > 0$ et $y > 0$. Quel est l'ensemble des consommations possibles ? Montrer que cet ensemble est convexe et borné.

CHAPITRE 3

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1. Fonctions de n variables

Définition 3.1

On appelle fonction numérique de n variables réelles, toute application f définie sur une partie D de $\mathbb{R}^n$ qui à tout point $M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associe un unique réel $f(x_1, \cdots, x_n)$ ou $f(M)$.

Exemple Considérons un panier de biens $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, chaque article i a un prix unitaire p_i, la valeur du panier de bien est $\sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i$ que l'on note $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. La fonction de n variables f est le prix du panier de biens $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Exemple Dans le cas où $n = 2$, on peut associer à tout point du plan une altitude en mètre. C'est ce que l'on observe sur les cartes de randonnées.

Exemple On pose

$$f(m, p) = A\frac{m^{2.08}}{p^{1.5}},$$

où p est le prix d'un litre de lait et m le revenu moyen d'une famille. La fonction $f(m, p)$ est la consommation de lait. On appelle cette fonction la fonction de Cobb Douglas. On remarque que lorsque le prix p augmente, la consommation diminue et lorsque le revenu m augmente, la consommation augmente.

Définition 3.2 – Fonction affine

On appelle fonction affine de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ toute application f définie par

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b,$$

où les a_i et b sont des réels fixés.

2. Domaine de définition

Définition 3.3

Etant donné une fonction f de n variables, le domaine de définition de f est l'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ pour lesquels on peut calculer $f(M) = f(x_1, \cdots, x_n)$.

Exemple On pose

$$f(x, y) = \frac{1}{x - y},$$

Pour pouvoir calculer f, le dénominateur doit être non nul donc le domaine de définition de f est

$$D_f = \{M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x - y \neq 0\}.$$

Exemple On pose

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

Pour pouvoir calculer f, l'expression sous la racine doit être positive donc le domaine de définition de f est

$$D_f = \{M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

On reconnait une boule fermée de centre l'origine et de rayon 1.
Exemple On pose

$$f(x, y) = \ln(2x + y - 3),$$

Pour pouvoir calculer f, l'argument du logarithme doit être strictement positif donc le domaine de définition de f est

$$D_f = \{M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad 2x + y - 3 > 0\}.$$

On reconnait un demi-plan.

3. Courbes de niveau

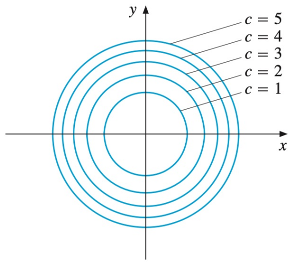
Définition 3.4 – Courbe de niveau

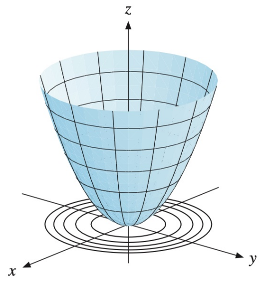
Etant donné une fonction f de n variables définie sur le domaine D de $\mathbb{R}^n$, soit k un réel, la courbe de niveau k notée $\mathcal{C}_k$ est l'ensemble des points M de D vérifiant $f(M) = k$.

$$\mathcal{C}_k = \{M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad M \in D \text{ et } f(M) = k\}.$$

Exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$, on note $\mathcal{C}_c$ la courbe de niveau on a

- si $c < 0$, $\mathcal{C}_c = \emptyset$
- si $c = 0$, $\mathcal{C}_c = \{O\}$
- si $c > 0$, $\mathcal{C}_c$ est un cercle de centre O de rayon $\sqrt{c}$





4. Graphes

Définition 3.5 – Graphe de f

Soit f définie sur $D \subset R^n$. Le graphe de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$G_f = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \;\; (x_1, \cdots, x_n) \in D \;\; f(x_1, \cdots, x_n) = x_{n+1}\}.$$

Soit k un réel on appelle ensemble de niveau k de la fonction f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$E_k = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n \;\; (x_1, \cdots, x_n) \in D \;\; f(x_1, \cdots, x_n) = k\}.$$

En dimension 2, les ensembles de niveau sont des lignes ou des courbes de niveau.

Exemple $f(x, y) = x + y + 4$ le graphe de f est un plan affine d'équation $z = x + y + 4$,
Exemple $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, le graphe de f est la demi sphère supérieure de centre O de rayon 1.

5. Continuité

Définition 3.6 – Continuité

Soit f une fonction définie sur $D \subset R^n$. On dit que f est continue au point $A \in D$ si

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \eta \;\; \forall M \in D \;\; \|M - A\| \leq \eta \Longrightarrow |f(M) - f(A)| \leq \epsilon.$$

On dit que f est continue sur D si f est continue en tout point de D.

$f(x, y, z) = Ln(x)sin(y) + \sqrt{z}$ on peut écrire

$$f = (Ln \circ \pi_1)(sin \circ \pi_2) + \sqrt{} \circ \pi_3$$

on en déduit que f est continue sur $R^{+*} \times R \times R^+$.

Soit f continue sur D fermé borné alors f est borné et admet un maximum et un minimum sur D. Plus précisément il existe $A \in D$ et $B \in D$ tel que pour tout $M \in D$

$$f(A) \leq f(M) \leq f(B).$$

6. Exercices

Exercice 3.1. — Représenter, sur un même graphique, le domaine de définition de f et les courbes de niveau k demandées.

1. $f(x, y) = xy$, k quelconque.
2. $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{8 - x^2 y^2}$, courbe de niveau pour k = 2.
3. $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x + y^2}$, courbe de niveau 0 et courbe de niveau -1.

Exercice 3.2. — On considère la fonction réelle de deux variables f définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$$

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition D_f . Est-il ouvert? Convexe?
2. Déterminer et représenter (sur le même graphique que pour la question précédente) la courbe de niveau C_k pour $k = -2$ et $k = 1$.

CHAPITRE 4

DÉRIVÉE PARTIELLE PREMIÈRE

1. Définitions

Par souci de clarté, nous traitons ce chapitre pour des fonctions à deux variables.

Définition 4.1 – Application partielles

Soit f une application définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de D. On note

$$I = \{x \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y_0 \end{pmatrix} \in D\} \text{ et } J = \{y \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y \end{pmatrix} \in D\}.$$

On associe à f deux applications partielles f_1 et f_2 définies par

$$\forall x \in I \ \ , f_1(x) = f(x, y_0) \text{ et } \forall y \in J, \ \ f_2(y) = f(x_0, y).$$

Remarque Ces deux applications partielles sont des fonctions à une variables.
Exemple Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ \ f(x, y) = x^2 + y.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, les applications partielles sont définies sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f_1(x) = x^2 + 1, \ \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, \ \ f_2(y) = 1 + y.$$

Les applications partielles dépendent du point A choisi.
Exemple Soient $f(x, y) = x^2\, y^3$ et $M_0 = (x_0, y_0)$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$. Considérons les fonctions partielles de f au point M_0

$$f_1(x) = x^2\, y_0^3 \quad \text{ et } \quad f_2(y) = x_0^2\, y^3.$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont des polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f_1'(x) = 2\, x\, y_0^3, \quad f_2'(y) = 3\, x_0^2\, y^2.$$

Les dérivées des applications partielles sont appelés dérivées partielles premières de f au point A. Nous avons donc la définition

Définition 4.2

Soit f une application définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$, U un ouvert inclus dans D et $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de U. Alors les applications partielles f_1 et f_2 sont définies sur des ouverts I et J de $\mathbb{R}$. De plus si f_1 est dérivable en x_0, alors on dit que f admet une dérivée partielle première en A par rapport à la variable x et on note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0).$$

si f_2 est dérivable en y_0, alors on dit que f admet une dérivée partielle première en A par rapport à la variable y et on note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_2'(x_0).$$

Exemple

— $f(x, y) = ye^{x^2}$.
— $f(x, y, z) = zLn(xy^3) + z^2(x + y)$
— $f(x_1, \cdots, x_n) = x_1 \cdots x_n + x_1 + \cdots + x_n$

Définition 4.3 – Vecteur gradient

Si les deux dérivées partielles premières de f existent au point $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, on appelle *gradient de f au point A* le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\nabla f(A) = \nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Le symbole "∇" se prononce "nabla".

Notation Notations de Monge : $\quad p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$

Les notations (p, q) de Monge sont pratiques mais ambigües car elles désignent les dérivées partielles premières en un point sans préciser explicitement le point concerné.

Définition 4.4

Soit f une application définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$, U un ouvert inclus dans D. Si les deux dérivées partielles premières de f existent en tout point $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de U, on définit les applications suivantes de U dans $\mathbb{R}$:

— la fonction dérivée partielle première par rapport à x: $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$,
— la fonction dérivée partielle première par rapport à y : $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Exemple Soient $f(x, y) = y\, e^{x^2}$ avec $D_f = dR^2 = U$. On dérive f par rapport à x en considérant y comme une constante, et on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\, x\, y\, e^{x^2}.$$

De même, on dérive f par rapport à y en considérant x comme une constante, et on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2}.$$

2. Fonctions de classe C^1

Définition 4.5 – Fonction de classe C^1

On dit que f est de classe C^1 sur un ouvert U, si les deux fonctions dérivées partielles premières de f existent et sont continues sur U.

Exemple Les fonctions polynômes de deux variables, donc en particulier les fonctions affines et les projections, sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. et les fractions rationnelles (c'est-à-dire les quotients de deux polynômes) sont de classe C^1 sur le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ où leur dénominateur ne s'annule pas.
Exemple Soit la fonction

$$f(x,y) = x^y = e^{y \ln x}.$$

Alors

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$$

est un ouvert comme produit cartésien d'intervalles ouverts.

3. Développement limité d'ordre 1

3.1. Pour une fonction d'une variable. —

3.1.1. Le développement limité à l'ordre 1. — On considère une fonction d'une variable définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en $x = a$ où a est un réel de I. Cela signifie que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Cette égalité peut encore s'écrire

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \epsilon(x-a) \text{ où } \lim_{x\to a} \epsilon(x-a) = 0.$$

En multipliant par $x - a$ on obtient

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\epsilon(x-a).$$

ce qui est l'expression du développement limité de f en a.

1. Pour x au voisinage de a :

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)f'(a)}_{\text{fonction polynomiale de degré 1}} + (x-a)\underbrace{\varepsilon(x-a)}_{\underset{x\to a}{\longrightarrow 0}}$$

2. Pour $h = x - a$ proche de 0 :

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + hf'(a)}_{\text{fonction polynomiale de degré 1}} + h\underbrace{\varepsilon(h)}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow 0}}$$

Exemple Écrire le développement limité à l'ordre 1 de $f : x \longmapsto e^x$ en 1.

On a

$$f(1) = e^1 = e, \quad \text{et puisque } f'(x) = e^x \text{ donc } f'(1) = e^1 = e.$$

Pour tout réel x, on a :

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + (x-1)\underbrace{\varepsilon(x-1)}_{\substack{\longrightarrow 0\\ x\to 1}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = e + (x-1)e + (x-1)\underbrace{\varepsilon(x-1)}_{\substack{\longrightarrow 0\\ x\to 1}}$$

Cette égalité est vraie pour tout réel x mais son intérêt est lorsque x est proche de 1.
Exemple Écrire le développement limité à l'ordre 1 de $f : x \longmapsto \ln(x)$ en 3.

On a

$$f(3) = \ln(3) \quad \text{et puisque } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ donc } f'(3) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = f(3) + (x-3)f'(3) + (x-3)\underbrace{\varepsilon(x-3)}_{\substack{\longrightarrow 0\\ x\to 3}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln(x) = \ln(3) + (x-3)\frac{1}{3} + (x-3)\underbrace{\varepsilon(x-3)}_{\substack{\longrightarrow 0\\ x\to 3}}$$

3.1.2. Approximation affine et calcul approché. — On considère une fonction d'une variable définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en $x = a$ où a est un réel de I. Le DL_1 de f en a s'écrit (pour h proche de 0) :

$$f(a+h) = f(a) + hf('a) + h\underbrace{\varepsilon(h)}_{\substack{\longrightarrow 0\\ h\to 0}}$$

Donc ***l'approximation affine de*** f ***en*** a s'écrit :

$$\boxed{\text{Pour } h \text{ proche de } 0 \ : \qquad f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)}$$

Remarque Pour de petites valeurs de h, on peut utiliser cette approximation affine pour faire des calculs approchés sans calculatrice.

Exemple Déterminer une valeur approchée de 1.02^7 sans utiliser la calculatrice.

$f : x \longmapsto x^7$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, et $f' : x \longmapsto 7x^6$. On a donc $f(1) = 1^7 = 1$, et $f'(1) = 7 \times 1^6 = 7$. Donc si h est proche de 0, on a :

$$f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1) \quad \text{càd que} \quad f(1+h) \simeq 1 + 7h$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} 1.02^7 & = & f(1.02) \\ & = & f(1+0.02) \\ & \simeq & 1 + 7 \times 0.02 \\ & \simeq & 1 + 0.14 \\ & \simeq & \boxed{1.14} \end{array}$$

On peut vérifier à la calculatrice que $1.02^7 \simeq 1.149$.

3.1.3. Lien avec la tangente. — Le DL_1 de f en a s'écrit, pour x proche de a :

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)f'(a)}_{\substack{\text{fonction affine (=de degré 1)} \\ \text{la plus proche de } f \text{ au voisinage de } a}} + (x-a)\underbrace{\varepsilon(x-a)}_{\underset{x\to a}{\longrightarrow} 0}$$

Cette fonction affine a pour courbe la droite d'équation $y = f(a) + (x-a)f'(a)$. Il s'agit de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

3.2. Pour une fonction de 2 variables. — On a

Définition 4.6 – Développement limité à l'ordre 1

Soit f une fonction définie **sur U ouvert de** R^2 et $A \in U$. On dit que f admet un développement limité d'ordre 1 en A si il existe un réel b_0 et un vecteur b de $\mathbb{R}^2$ $b = (b_1, b_2)$, tel pour tout vecteur $\vec{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ avec $A + \vec{h} \in D$ on ait

$$f(A + \vec{h}) = b_0 + b_1 h + b_2 k + \|h\|\epsilon(h) = b_0 + \langle \vec{h}, \vec{b} \rangle + \|\vec{h}\|\,\epsilon(\vec{h}),$$

où ϵ est une fonction définie sur $E = \{\vec{h} \in R^2 \quad A + \vec{h} \in U\}$ continue en O avec $\epsilon(0) = 0$.
La quantité $\|\vec{h}\|\,\epsilon(\vec{h})$ s'appelle le reste du DL.

Théorème 4.7

Soit f une fonction de classe C^1 sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors f possède un DL d'ordre 1 en tout point A de U.
De plus pour tout point A de U, soit $E = \{\vec{h} \in \mathbb{R}^2 \quad A + \vec{h} \in U\}$, il existe une fonction ϵ définie sur E continue en O avec $\epsilon(0) = 0$ telle que $\forall \vec{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in E$

$$f(A + \vec{h}) = f(A) + h\frac{\partial f}{\partial x}(A) + k\frac{\partial f}{\partial y}(A) + \|\vec{h}\|\,\epsilon(h) = f(A) + \langle \nabla f(A), \vec{h} \rangle + \|\vec{h}\|\,\epsilon(h).$$

Ce dl est unique.

Il y a deux écritures pour un développement limité

1. Pour (x, y) proche de (x_0, y_0) :

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + p(x-x_0) + q(y-y_0)}_{\text{fonction affine (2 variables)}} + \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\| \underbrace{\varepsilon(x-x_0, y-y_0)}_{\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0}}_{\text{reste d'ordre 1}}$$

2. Pour $(h, k) = (x - x_0, y - y_0)$ proche de $(0, 0)$, alors :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + ph + qk + \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\| \underbrace{\varepsilon(h,k)}_{\underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0}}_{\text{reste d'ordre 1}}$$

Exemple

— $f(x, y, z) = zLn(xy^3) + z^2(x + y)$ on a

$$f(1+h, 1+k, 2+l) = 8 + 6h + 10k + 8l + reste$$

— calcul approchée de $(1,01)^{0,98}$ on utilise $f(x, y) = x^y$ et on se place en $(1, 1)$.

$$f(1+h, 1+k) = 1 + h$$

3.2.1. Approximation affine. — On a

Définition 4.8 – Approximation affine

Si f admet un dl d'ordre 1 au point A de U ouvert de R^2 on appelle approximation affine de f au point A la fonction affine $\hat{f}_A$ définie par

$$\hat{f}_A(x,y) = f(A) + \langle \nabla f(A), \overrightarrow{AM} \rangle$$

le graphe de cette fonction est un hyperplan affine tangent au graphe en $(A, f(A))$.

Exemple Calculer une valeur approchée sans calculatrice de $\sqrt{3.92 \times 1.01}$.

Soit $f : (x,y) \longmapsto \sqrt{xy}$.

$$(x,y) \in D_f \iff xy \geq 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{array} \right.$$

D_f n'est pas ouvert, on se place donc sur le plus grand ouvert inclus dans D_f, c'est :

$$\mathcal{U} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ y < 0 \end{array} \right. \right\}$$

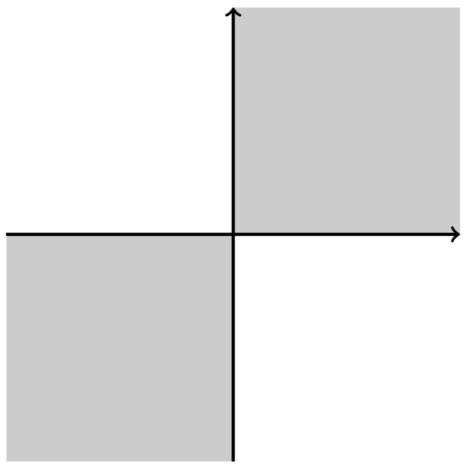


FIGURE 1. Domaine de définition de $f(x,y) = \sqrt{xy}$ en gris

$v : (x,y) \longmapsto xy$ est polynomiale donc C^1 sur U. De plus, si $(x,y) \in U$, $v(x,y) = xy \in \mathbb{R}_+^*$. Or $t \longmapsto \sqrt{t}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc par composition, f est C^1 sur U. Si $(x,y) \in U$, on a :

$$p = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \qquad q = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

En $(4,1)$, on a :
- ⋆ $f(4,1) = \sqrt{4 \times 1} = \sqrt{4} = 2$
- ⋆ $p = \dfrac{1}{2\sqrt{4 \times 1}} = \dfrac{1}{2 \times 2} = \dfrac{1}{4}$
- ⋆ $q = \dfrac{4}{2\sqrt{4 \times 1}} = \dfrac{4}{2 \times 2} = 1$

Pour (h, k) proche de $(0, 0)$, on a donc :

$$\begin{aligned} f(4+h, 1+k) &\simeq f(4,1) + ph + qk \\ &\simeq 2 + \frac{1}{4}h + k \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sqrt{3.92 \times 1.01} &= f(3.92, 1.01) \\ &= f(4 - 0.08, 1 + 0.01) \\ &\simeq 2 + \frac{1}{4} \times (-008) + 0.01 \\ &\simeq 2 - 0.02 + 0.01 \\ &\simeq 1.99 \end{aligned}$$

On peut vérifier à la calculatrice que $\sqrt{3.92 \times 1.01} \simeq 1.98977$.

4. Plan tangent

Le graphe d'une fonction à deux variables est une surface S_f, on ne peut donc pas parler de tangente, mais de ***plan tangent*** $\mathcal{P}$ ***en un point*** $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$: il s'agit d'un plan qui "colle la surface" en ce point.

Si le plan n'est pas vertical, son équation peut s'écrire sous la forme $z = Ax + By + C$, où $(x, y) \longmapsto Ax + By + C$ est la fonction affine (en 2 variables) qui approche le mieux la fonction f au voisinage de (x_0, y_0).

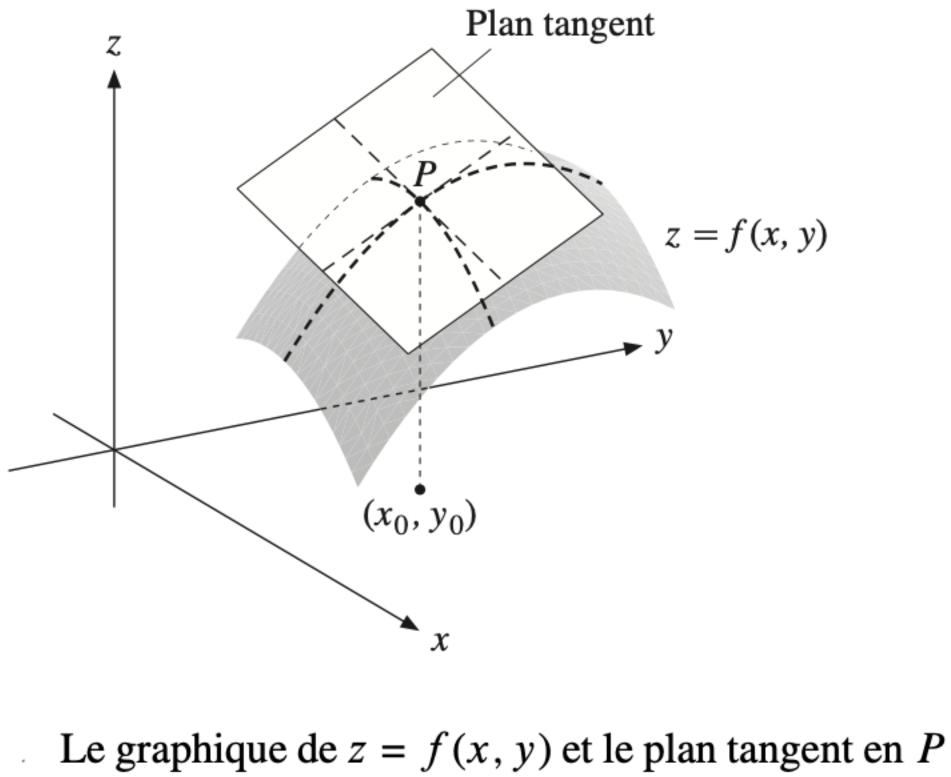


Figure 2. Plan tangent

• Le début du DL_1 écrit sous la première forme permet donc d'obtenir une équation du plan tangent. Plus précisément, si le DL_1 est :

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + p(x-x_0) + q(y-y_0) + \| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \| \underbrace{\varepsilon(x-x_0,y-y_0)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ (x,y)\to(x_0,y_0)}}$$

Alors le plan tangent à la surface de f en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ a pour équation :

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + p(x-x_0) + q(y-y_0)}$$

Exemple On reprend $f : (x,y) \longmapsto 5x^2y - 3xy^2 + 1$ (cf plus haut). On a montré que le DL_1 en $(1,2)$ était :

$$f(1+h,2+k) = -1 + 8h - 7k + \|(h,k)\| \underbrace{\varepsilon(h,k)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ (h,k)\to(0,0)}}$$

Le plan P tangent à la surface représentative de f en $(1,2,f(1,2))$ est :

$$P : z = \underbrace{-1 + 8(x-1) - 7(y-2)}_{\substack{\text{on a remplacé } h \text{ par } x-1 \\ \text{et } k \text{ par } y-2}}$$

On en déduit donc que $P : z = -1 + 8x - 8 - 7y + 14$, soit encore que $P : z = 8x - 7y + 5$.

4.1. Tangente à une ligne de niveau. — La courbe de niveau k (notée C_k) est l'ensemble des antécédents de k. Autrement dit, c'est l'ensemble des éléments(x,y) de D_f pour lesquels on a $f(x,y) = k$, c'est-à-dire pour lesquels le point de la surface S_f est d'altitude k.

On se place en $(x_0,y_0) \in D_f$. Si on pose $k = f(x_0,y_0)$, alors le point (x_0,y_0) est sur la ligne de niveau k (càd C_k).

En s'aidant d'une équation du plan tangent, on peut montrer que la tangente T à la courbe de niveau k en (x_0,y_0) a pour équation :

$$\boxed{T : p(x-x_0) + q(y-y_0) = 0}$$

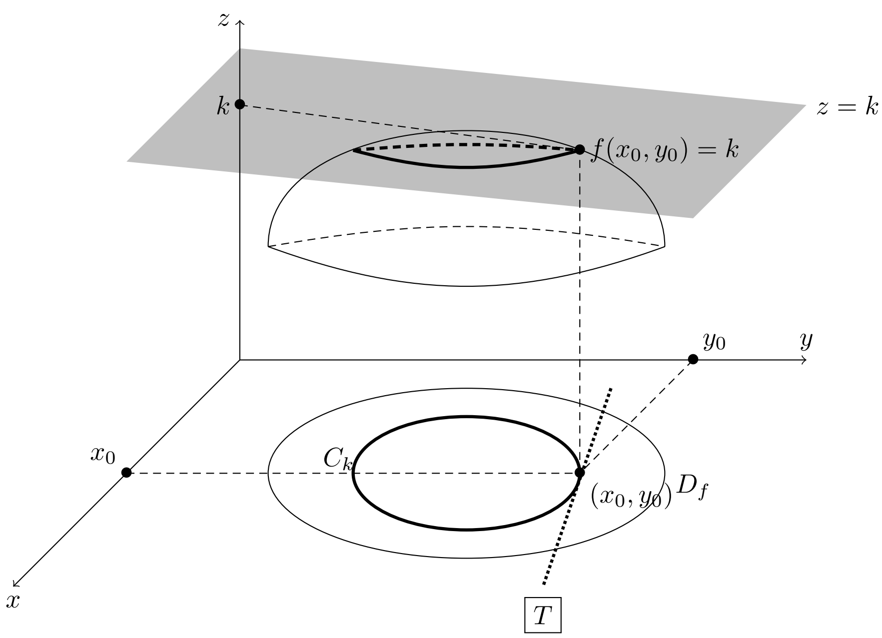


Figure 3. Tangente à une ligne de niveau

5. Exercices

Exercice 4.1. — On considère les fonctions suivantes

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x^x \text{ et } g(x) = x - 1 + \ln(x).$$

1. Calculer les dérivées de f et de g.
2. Ecrire les DL ‘a l’ordre 1 pour les fonctions f et g au voisinage de 1.
3. On considère la fonction ϕ définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par
$$\phi(x) = \frac{f(x)-1}{g(x)} = \frac{x^x - 1}{x - 1 + \ln(x)}.$$
. Montrer que $\phi(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1.

Exercice 4.2. — On considère les fonctions suivantes

$$f_1(x,y) = x^3 + 2xy^2 - 2y^4, \quad f_2(x,y) = \frac{x-y}{x+y}, \quad f_3(x,y) = \ln(\frac{xy}{x^2+y^2}), f_4(x,y) = (y+2)^{x+1}.$$

1. Déterminer et représenter les domaines de définition des fonction ci-dessus.
2. Calculer les dérivées partielles premières des fonctions définies ci-dessus.

Exercice 4.3. — On considère la fonction suivante

$$f(x,y) = e^{x/y}.$$

1. Déterminer et représenter le domaine de définition de f.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f.
3. Soit $A = (0,1)$ et $B = (1,2)$, déterminer les vecteurs gradients $\nabla f(A)$ et $\nabla f(B)$.
4. ´Ecrire le DL à l’ordre 1 de f au voisinage du point $A = (0,1)$.
5. Déterminer l’approximation affine de f au voisinage du point A.
6. Déterminer l’équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(0,1,f(0,1))$.

Exercice 4.4. — Calculer les valeurs approchées des expressions suivantes et comparer à la valeur donnée

1. $(1.02)^{3.01} \simeq 1.061418$.
2. $\ln(1.02 \times 0.9) \simeq -009555$.

Exercice 4.5. — Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > 0, \quad y > 0\}$. On admet que D est ouvert. On considère la fonction d’utilité U définie sur D par :

$$\forall (x,y) \in D, \quad U(x,y) = \frac{2xy^2}{x+y},$$

où x et y désignent les quantités consommées des deux biens X et Y . On admet que U est de classe C^1 sur D. On supose que $x_0 = 4$ et $y_0 = 2$. Déterminer l’équation de la tangente au point (x_0,y_0) à la courbe de niveau passant par (x_0,y_0).

Exercice 4.6. — Déterminer l’approximation affine des fonctions suivantes aux points indiqués:

1. $f(x,y) = \frac{x+y}{1+x+y}$ au voisinage de $(1,0)$ et $(0,0)$..
2. $g(x,y) = xe^{x^2-y^2}$ au voisinage de $(1,1)$..

CHAPITRE 5

DÉRIVÉE PARTIELLE SECONDE

1. Fonctions dérivées partielles secondes

On peut se demander si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ admettent à leur tour des fonctions dérivées partielles. Si c'est le cas, on définit ainsi les fonctions dérivées partielles secondes.

Définition 5.1

Soit f une application définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$, U un ouvert inclus dans D. Si les fonctions dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et admettent des fonctions dérivées partielles sur U ces dérivées partielles sont appelées fonctions dérivées partielles secondes de f sur U, et notées :

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & = & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & = & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right). \end{array}.$$

Remarque Si les dérivées partielles secondes de f existent en tout point M de U, à partir d'une fonction f de deux variables, on peut donc définir quatre fonctions dérivées partielles secondes.
Exemple Soit $f(x,y) = ye^{x^2}$, on trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\,y\,e^{x^2} + 4\,x^2\,y\,e^{x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2\,x\,e^{x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2\,x\,e^{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

L'égalité entre les dérivées partielles secondes "croisées" est vraie sous certaines hypothèses

On dispose ces 4 dérivées partielles dans un tableau appelé matrice.

Définition 5.2 – Matrice hessienne

Si f admet des dérivées partielles secondes au point $M_0 = (x_0, y_0)$ on appelle matrice hessienne de f au point $M_0 = (x_0, y_0)$ la matrice :

$$D^2 f(M_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) \end{pmatrix}$$

On obtient pour l'exemple :

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,y\,e^{x^2} + 4\,x^2\,y\,e^{x^2} & 2\,x\,e^{x^2} \\ 2\,x\,e^{x^2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 6\,e & 2\,e \\ 2\,e & 0 \end{pmatrix}$$

2. Fonctions de classe $\mathbb{C}^2$

Définition 5.3 – Fonctions de classe C^2

On dit que f est de classe C^2 sur U si f admet des fonctions dérivées partielles secondes sur U et si les toutes les fonctions dérivées partielles secondes de f sont continues sur U.

Théorème 5.4 – Théorème de Schwarz

Si f est de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ alors on a sur U :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Dans le cas $n = 2$, on utilise les notations de Monge

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)$$

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Exemple les fonction polynômes sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que les fractions rationnelles sur tout ouvert inclus dans le domaine de définition.

3. Développement limité d'ordre 2

3.1. Pour une fonction d'une variable. —

3.1.1. Le développement limité à l'ordre 2. — On considère une fonction d'une variable définie sur un intervalle ouvert I et de classe C^2 sur I, on suppose cette deux fois dérivable en $x = a$, le développement limité de f en $x = a$ à l'ordre 2 est

Écriture A **-** Pour x au voisinage de a :

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)}_{\text{fonction polynomiale de degré 2}} + (x-a)^2 \underbrace{\varepsilon(x-a)}_{\underset{x\to a}{\longrightarrow 0}}$$

Écriture B **-** Pour $h = x - a$ proche de 0 :

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a)}_{\text{fonction polynomiale de degré 2}} + h^2 \underbrace{\varepsilon(h)}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow 0}}$$

• ***Exemple 1*** **-** Écrire le développement limité à l'ordre 2 de $f : x \longmapsto e^x$ en 1.

On a :
- ⋆ $f(1) = e^1 = e$
- ⋆ $f'(x) = e^x$ donc $f'(1) = e^1 = e$
- ⋆ $f''(x) = e^x$ donc $f''(1) = e^1 = e$

Pour x proche de 1, on a :

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 f''(1) + (x-1)^2 \underbrace{\varepsilon(x-1)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ x\to 1}}$$

On en déduit donc que :

$$f(x) = e + (x-1)e + \frac{e}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2 \underbrace{\varepsilon(x-1)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ x\to 1}}$$

• ***Exemple 2 -*** Écrire le développement limité à l'ordre 1 de $f : x \longmapsto \ln(x)$ en 3.

On a :
- ⋆ $f(3) = \ln(3)$
- ⋆ $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $f'(3) = \dfrac{1}{3}$
- ⋆ $f''(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ donc $f''(3) = \dfrac{-1}{9}$

Pour x proche de 3, on a :

$$f(x) = f(3) + (x-3)f'(3) + \frac{1}{2}(x-3)^2 f''(3) + (x-3^2) \underbrace{\varepsilon(x-3)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ x\to 3}}$$

On en déduit donc que :

$$f(x) = \ln(3) + (x-3)\frac{1}{3} - \frac{1}{18}(x-3)^2 + (x-3)^2 \underbrace{\varepsilon(x-3)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ x\to 3}}$$

3.1.2. Position de la courbe par rapport à la tangente. — On considère une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 2. On étudie la position de la courbe par rapport à la tangente en $x = a$ et lorsque x est proche de a. On étudie donc la différence

$$\Delta = f(x) - (f(a) + f'a)(x-a).$$

en utilisant le développement limité à l'ordre 2, on a

$$\Delta = \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + (x-a)^2 \epsilon(x-a), \quad \text{avec } \lim_{x\to a} \epsilon(x-a) = 0.$$

On en déduit que
- — si $f''(a) > 0$, alors Δ est strictement positif pour x proche de a. Dans ce cas la courbe de f est au dessus de sa tangente.
- — si $f''(a) < 0$, alors Δ est strictement négatif pour x proche de a. Dans ce cas la courbe de f est au dessous de sa tangente.

3.2. Pour une fonction de 2 variables. — On a

Définition 5.5

Une fonction f de classe C^2 sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ possède un développement limité d'ordre 2 en tout point A de U c'est-à-dire il existe une fonction ϵ définie sur $E = \{\vec{h} \in \mathbb{R}^2 \quad A+\vec{h} \in U\}$, continue en 0 avec $\epsilon(0) = 0$ et telle que pour tout $\vec{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in E$

$$f(A+h) = f(A) + \langle \nabla f(A), \vec{h} \rangle + \frac{1}{2}(rh^2 + 2s\,hk + t\,k^2) + ||\vec{h}||^2\, \varepsilon(\vec{h}).$$

Ce dL est unique.

On peut écrire de deux manières un développement limité

Écriture A - On définitit la forme quadratique $Q(X,Y) = rX^2 + 2sXY + tY^2$, où, r, s et t sont définies par la notation de Monge.

Pour (x,y) proche de (x_0,y_0) :

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + p(x-x_0) + q(y-y_0) + \frac{1}{2}Q(x-x_0,y-y_0)}_{\text{fonction (2 variables)}} + \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\|^2} \underbrace{\varepsilon(x-x_0,y-y_0)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ (x,y)\to(x_0,y_0)}}$$

Écriture B - Pour $(h,k) = (x-x_0, y-y_0)$ proche de $(0,0)$, alors :

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + ph + qk + \frac{1}{2}Q(h,k) + \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|^2 \underbrace{\varepsilon(h,k)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ (h,k)\to(0,0)}}$$

Exemple Écrire le DL_2 de $f : (x,y) \longmapsto 5x^2y - 3xy^2 + 1$ en $(1,2)$.

f est polynomiale donc C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (ouvert). Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$p = 10xy - 3y^2 \qquad q = 5x^2 - 6xy$$

et

$$r = 10x, \quad s = 10x - 6y, \quad t = -6x.$$

En $(1,2)$, on a donc :

— $f(1,2) = 5 \times 1^2 \times 2 - 3 \times 1 \times 2^2 + 1 = 10 - 12 + 1 = -1$

— $p = 10 \times 1 \times 2 - 3 \times 2^2 = 20 - 12 = 8$

— $q = 5 \times 1^2 - 6 \times 1 \times 2 = 5 - 12 = -7$

— $r = 10$, $s = -2$ et $t = 6$.

Pour (h,k) proche de $(0,0)$, on a :

$$f(1+h,2+k) = f(1,2) + ph + qk + + \frac{1}{2}Q(h;k) \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|^2 \underbrace{\varepsilon(h,k)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ (h,k)\to(0,0)}}$$

Soit donc :

$$f(1+h,2+k) = -1 + 8h - 7k + 5h^2 - 2hk + 3k^2 + \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|^2 \underbrace{\varepsilon(h,k)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ (h,k)\to(0,0)}}$$

Exemple $f(x,y) = ye^{x^2}$

4. Position par rapport au plan tangent

On considère une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 2 au point A. On étudie la position du graphe par rapport au plan tangent en A et lorsque $M = (x,y)$ est proche de $A = (x_0,y_0)$. On étudie donc la différence

$$\Delta = f(x,y) - (p(x-x_0) + q(y-y_0)).$$

en utilisant le développement limité à l'ordre 2, on a

$$\Delta = \frac{1}{2}Q(x-x_0,y-y_0) + + \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\|^2} \underbrace{\varepsilon(x-x_0,y-y_0).}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ (x,y)\to(x_0,y_0)}}$$

Il s'agit donc d'étudier le signe de la forme quadratique $Q(x-x_0,y-y_0)$. On note que l'étude de signe de la forme quadratique

$$Q(x-x_0,y-y_0) = r(x-x_0)^2 + 2s(x-x_0)(y-y_0) + t(y-y_0)^2,$$

est équivalent à étudier le signe du déterminant la matrice hessienne, soit $rt - s^2$.

Proposition 5.6

On a
- *si* $rt - s^2 > 0$ *et* $r > 0$ *ou* $t > 0$, *alors, pour* $M = (x, y)$ *proche du point* $A = (x_0, y_0)$, Δ *est positif. Dans ce cas, le graphe de* f *est au-dessus du plan tangent,*
- *si* $rt - s^2 > 0$ *et* $r < 0$ *ou* $t < 0$, *alors, pour* M *proche du point* A, $\Delta(M)$ *est négatif. Dans ce cas, le graphe de* f *est au-dessous du plan tangent,*
- *si* $rt - s^2 < 0$, *alors* $\Delta(M)$ *change de signe lorsque* M *est proche de* A. *Dans ce cas, le graphe de* f *traverse le plan tangent,*
- *si* $rt - s^2 = 0$, *alors on ne peut pas conclure.*

• ***Exemple 3 -*** On considère la fonction définie sur R^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

En tant que fonction polynômiale, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \text{ et } D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On se place au point $A = (1, 1)$, le développement limité de f en A est

$$f(x, y) = 2 + 2(x-1) + 2(y-1) + (x-1)^2 + (y-1)^2 + \ || \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} ||^2 \underbrace{\varepsilon(x-1, y-1)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ (x,y) \to (1,1)}}$$

Une équation du plan tangent en A est $z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$, soit $z = 2x + 2y - 2$. Pour étudier la position du graphe de f, par rapport au plan tangent en A, on étudie le signe de

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \ || \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} ||^2 \times \underbrace{\varepsilon(x-1, y-1)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ (x,y) \to (1,1)}}$$

Cette expression est positive lorsque (x, y) est proche de $(1, 1)$, donc le graphe est au-dessus du plan tangent en A.

On aurait pu obtenir ce résultat directement en appliquant la règle $rt - s^2 = 4 > 0$ et $r = 2 > 0$, d'où le résultat.

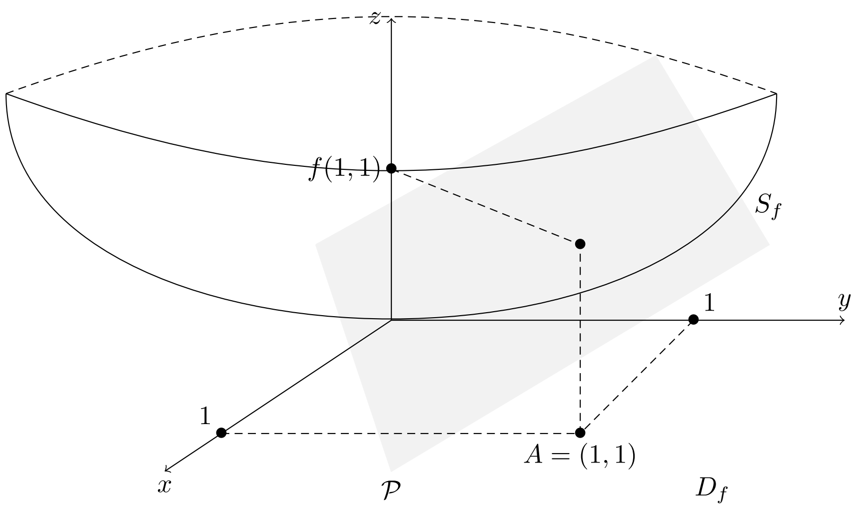


Figure 1. Plan tangent $\mathcal{P}$ au graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$ au point $A = (1, 1)$.

5. Exercices

Exercice 5.1. — On définit les fonctions

$$f_1(x,y) = y\ln(x), \quad f_2(x,y) = x^y, \quad f_3(x,y) = 3x^2 + 4xy - 3y^2, \quad f_4(x,y) = \frac{x^2+y}{xy}.$$

1. Déterminer les domaines de définition des fonctions ci-dessus
2. Calculer les dérivée partielles secondes des fonctions ci-dessus.

Exercice 5.2. — On définit les fonctions

$$f_1(x,y) = x^2y + 3xy + y^4), \quad f_2(x,y) = \ln(1+2x+3y) \quad f_3(x,y) = x^2e^y - ye^x.$$

1. Déterminer les domaines de définition des fonctions ci-dessus
2. Ecrire le développement limité à l'orde 2 au voisinage du point $M_1 = (1,2)$ pour f_1, du point $M_2 = (0,0)$ pour f_2 et du point $M_3 = (0,0)$ pour f_3.
3. En déduire l'équation du plan tangent à la surface $\mathcal{S}_i$ représentative de f_i au point $(M_i, f(M_i))$ pour $i = 1,2,3$.
4. Pour les fonctions f_1 et f_3, préciser la position de la durface par rapport au plan tangent au voisinage de M_i. Peut-on répondre à cette question pour f_2.

CHAPITRE 6

FONCTIONS CONVEXES OU CONCAVES DE DEUX VARIABLES

1. Définition

Définition 6.1 – Fonction convexe

Soit f une fonction défini sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. Soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$ inclus dans D. On dit que f est convexe sur C si pour tous points A et B du graphe de f, le segment $[AB]$ est au dessus du graphe :

$$\forall (A,B) \in G_f^2,\ \ \forall t \in [0,1], f(A + t\overrightarrow{AB}) = f(tA + (1-t)B) \leq tf(A) + (1-t)f(B).$$

De même, on dit que f est concave sur C si pour tous points A et B du graphe de f, le segment $[AB]$ est en dessous du graphe :

$$\forall (A,B) \in G_f^2,\ \ \forall t \in [0,1], f(A + t\overrightarrow{AB}) = f(tA + (1-t)B) \geq tf(A) + (1-t)f(B).$$

Pour démontrer qu'une fonction est convexe, nous avons deux critères selon que f est C^1 ou C^2 sur un ouvert U contenant C.

Théorème 6.2 – Critère si f est C^1

Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et C un **ensemble convexe** *de $\mathbb{R}^2$ inclus dans $\mathcal{U}$.*
La fonction f est convexe sur C si et seulement si le graphe de f est située **au-dessus** *de tous ses plans tangents ce qui s'exprime par*

$$\forall (x,y) \in C,\ \forall (x_0,y_0) \in C,\ \ f(x,y) \geq f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

De même, on dit que f concave sur C si et seulement si le graphe de f est située **au-dessous** *de tous ses plans tangents.*

$$\forall (x,y) \in C,\ \forall (x_0,y_0) \in C,\ \ f(x,y) \leq f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Remarque f est concave sur C si et seulement si $-f$ est convexe sur C.
Remarque Si dans les définitions précédentes les inégalités sont strictes pour $(x,y) \neq (x_0,y_0)$, on parle alors de fonctions strictement convexes sur C ou strictement concaves sur C.
Exemple La fonction affine $f(x,y) = ax+by+c$ est à la fois convexe **et** concave sur $\mathbb{R}^2$. En effet, le graphe de f est le plan d'équation : $z = ax+by+c$ qui est confondu avec tous ses plans tangents. Donc les fonctions affines vérifient à la fois l'inégalité de convexité et l'inégalité de concavité .

On caractérise les fonctions convexes ou concaves d'une variable sur un intervalle à l'aide du signe de la dérivée seconde sur cet intervalle. Pour les fonctions de deux variables, le signe de la dérivée seconde est remplacé par le signe de la forme quadratique associée à la matrice hessienne.

Théorème 6.3 – Critère pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ et C **un ensemble convexe** *de $\mathbb{R}^2$ inclus dans $\mathcal{U}$. Pour tout $(x,y) \in C$, notons*

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Alors :

— *Si*

$$\forall (x,y) \in C,\ rt - s^2 \geq 0 \text{ et } (\mathrm{r} \geq 0 \text{ et } \mathrm{t} \geq 0) \ \textit{alors}\ \mathrm{f}\ \textit{est convexe sur}\ \mathrm{C}.$$

— *Si*

$$\forall (x,y) \in C,\ rt - s^2 \geq 0 \text{ et } (\mathrm{r} \leq 0 \text{ et } \mathrm{t} \leq 0) \ \textit{alors}\ \mathrm{f}\ \textit{est concave sur}\ \mathrm{C}.$$

— *S'il existe $(x,y) \in C$ tel que $rt - s^2 < 0$ au point (x,y) alors f n'est ni convexe, ni concave sur C.*

Remarque Si l'on a $\forall (x,y) \in C$, $r = 0$, $s = 0$ et $t = 0$ alors f est affine donc convexe et concave.

Attention Les notations r, s et t désignent les valeurs des dérivées partielles secondes de f en un point (x,y) quelconque de C donc l'expression $rt - s^2$ **dépend en général des variables** x **et** y et par suite l'étude du signe n'est pas toujours aisée.

Exemple Soit la fonction $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ sur l'ensemble $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ qui est ouvert. La fonction f est une fraction rationnelle donc de classe C^2 sur D_f qui est un ensemble ouvert. On a

$$r = \frac{2}{x^3 y},\ s = \frac{1}{x^2 y^2} \ \text{ et } \ t = \frac{2}{x y^3},$$

et donc $rt - s^2 = 3/(x^4 y^4) > 0$.

Puisque D_f n'est pas convexe, nous devons considérer les quatre sous-ensembles suivants de D_f qui sont convexes (comme intersections de demi-plans) :

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ , x > 0 \text{ et } \mathrm{y} > 0\} \ \text{ et } \mathrm{C}_2 = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 \ , \mathrm{x} < 0 \text{ et } \mathrm{y} > 0\}$$

$$C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ , x < 0 \text{ et } \mathrm{y} < 0\} \text{ et } \mathrm{C}_4 = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 \ , \mathrm{x} > 0 \text{ et } \mathrm{y} < 0\}$$

On déduit que f est convexe sur C_1 et sur C_3, et que f est concave sur C_2 et C_4.

Exemple

— Si $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2$ alors on montre que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
— Si $g(x,y) = -3x^2 + 3xy - y^2$ alors on montre que la fonction g est concave sur $\mathbb{R}^2$.
— Si $h(x,y) = 2x^2 + 3xy + y^2$ alors on montre que h n'est ni convexe, ni concave sur $\mathbb{R}^2$.

2. Propriétés des fonctions convexes ou concaves

Proposition 6.4 – Combinaison linéaire à coefficients positifs

Si f et g sont convexes (resp. concaves) sur $C \subset \mathbb{R}^2$, si α et β sont des réels **positifs** *alors $\alpha f + \beta g$ est convexe (resp. concave) sur C .*

Exemple Soient la fonction $h(x,y) = \dfrac{3}{xy} + 5\,(2x^2 + 3xy + 2y^2)$ et l'ensemble

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et y} > 0\}.$$

L'ensemble C est bien convexe. De plus la fonction $f(x,y) = 1/(xy)$ est convexe sur C. La fonction $g(x,y) = \ 2x^2 + 3xy + 2y^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$ donc sur C. Comme $h = 3\,f + 5\,g$, $(3 > 0$, $5 > 0)$ on déduit que h est convexe sur C.

Exemple La fonction $f(x,y) = e^x + y^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$, et la fonction $f(x,y) = \ln(x) - 1/y$ est concave sur $C =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Proposition 6.5 – Composition

Soit g convexe (resp. concave) sur C convexe de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe (resp.concave) **croissante** *sur I, telle que $f \circ g$ soit définie sur C.*
Alors $f \circ g$ est convexe (resp. concave) sur C.

Exemple Soit $h(x,y) = (x^2 + y^2) + \exp(x^2 + y^2)$. Montrons que h est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

En effet posons $g(x,y) = x^2 + y^2$ et $f(u) = u + \exp(u)$. La fonction g est convexe sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ car : $\forall u \in \mathbb{R}$, $f'(u) = 1 + \exp(u) > 0$ et $f''(u) = \exp(u) > 0$.

Ainsi $h = f \circ g$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$

Remarque Ce résultat est souvent appliqué avec g égale à l'exponentielle qui est convexe et croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc

1. Si g convexe sur C alors e^g convexe sur C .
2. Si $g > 0$ et si $\ln(g)$ convexe sur C alors g convexe sur C.
3. Si $g > 0$, $h > 0$, $\ln(g)$ et $\ln(h)$ convexes sur C alors gh est convexe sur C.

Exemple

— Soit la fonction $f_1(x,y) = e^{2x^2+3xy+2y^2}$, posons $g(x,y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2$. La fonction g est convexe sur $\mathbb{R}^2$ Donc f_1 est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

— Soit maintenant $f_2(x,y) = (x^2 + y^2 + 1)^2$ posons $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ alors g est convexe sur $\mathbb{R}^2$ et strictement positive. On en déduit que f_2 est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

— Prenons $f_3(x,y) = \frac{1}{xy}$, posons $g(x,y) = 1/x$ et $h(x,y) = 1/y$. Les fonctions g et h sont strictement positives sur $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \ \text{ et } \ y > 0\}$.
  On a $\ln(g(x,y)) = -\ln(x)$ et $\ln(h(x,y)) = -\ln(y)$. Ces deux dernières fonctions sont convexes sur C_1. Alors on en déduit que f_3 est convexe sur C_1.

3. Exercices

Exercice 6.1. — On définit les fonctions f et g par

$$f(x,y) = x^4 + y^4, \quad g(x,y) = (x-y)^2.$$

1. Montrer que les fonctions f et g sont convexes sur $\mathbb{R}^2$.
2. On pose $h = f - g$. Montrer que la fonction h n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.2. — On définit la fonction f

$$f(x,y) = \ln(1 + 2x + 3y).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est concave sur son domaine de définition.
3. En déduire la position de la surface $\mathcal{S}$ représentative de f par rapport à ses plans tangents. .

Exercice 6.3. — On définit la fonction f

$$f(x,y) = \frac{1-xy}{x+y}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Est-il convexe ?
2. Etudier la convexité ou la concavité de f sur $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x+y > 0\}$, puis sur $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; x+y < 0\}$,
3. On définit maintenant la fonction g par :
$$g(x,y) = \frac{1-xy}{x+y} - \ln(x+y).$$
Etudier la convexité (ou la concavité de g sur son domaine de définition qui est ouvert. .

Exercice 6.4. — On définit la fonction f

$$f(x,y) = \frac{e^{5x^2-xy+y^2}}{x^2y}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Est-il convexe ?
2. Montrer que f est convexe sur $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; x > 0, \; y > 0\}$. On admet que C est un ouvert. *Penser au logarithme.*
3. On définit maintenant la fonction g par :
$$g(x,y) = \frac{e^{5x^2-xy+y^2}}{x^2y} + ((x+y)^2+1)^3.$$
Montrer que g est convexe sur C. .

Exercice 6.5. — Etudier la convexité ou la concavité des fonctions suivantes sur les ensembles indiqués qui sont tous des ouverts :

1. $f(x,y) = x^{1/3} + 3\ln(y) - 2e^{x+y}$ sur $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; x > 0, \; y > 0\}$.
2. $g(x,y) = x^2 + y^4$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. $h(x,y) = \sqrt{2x+3y}$ sur $\mathcal{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; 2x+3y > 0\}$. .

Comparer $\mathcal{U}$ avec D_f et $\mathcal{V}$ avec D_h.

Exercice 6.6. — On définit la fonction f

$$f(x,y) = e^{x^4+y^4-2xy}$$

On admet que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer les dérivées partielles de f à l'ordre 1 puis à l'ordre 2 en un point (x,y) arbitraire de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $D^2f(0,1)$ et en déduire la convexité de la fonction f.
3. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au point $A = (0,1)$.
4. Déterminer l'équation du plan tangent au point A et sa position au voisinage de ce point par rapport à la courbe représentative de f.

Exercice 6.7. — On définit la fonction f

$$f(x,y) = (y-1)\ln(y-1) - \ln(x) + x^2 - xy + 2y^2 - 7y - 3/2x + 3.$$

1. Donner D_f , le domaine de définition de f et faire un dessin de cet ensemble. On précisera bien si les bords appartienent ou pas à l'ensemble.
2. L'ensemble D_f est-il convexe ?
3. On admet que f est de classe C^2 sur D_f .
4. Montrer que la fonction $\phi : u \mapsto u\ln(u)$ est convexe sur son ensemble de définition.
5. En déduire la convexité de f sur D_f.

CHAPITRE 7

EXTREMA LIBRES POUR DEUX VARIABLES

1. Extremum

Définition 7.1 – Extremum

Soit f une fonction définie **sur** D **ouvert de** R^2 et $A \in D$. On dit que f présente un maximum local sur D en A si il existe une boule ouverte de centre A de rayon $r > 0$ incluse dans D telle que pour tout point M ce cette boule, $f(M) \leq f(A)$. On définit de même un minimum local. On dit que f présente un maximum global sur D en A si pour tout point M de D $f(M) \leq f(A)$. On définit de même un minimum global.

Nous étudions les extrema, s'ils existent, des fonctions de deux variables sur un ouvert. Il s'agit de l'optimisation dite **sans contrainte ou libre**.

2. Conditions nécessaires ou conditions du premier ordre

Théorème 7.2

On suppose que f admet en tout point de U des dérivées partielles du premier ordre. Si f présente un extremum (local ou global) sur l'ouvert U en $(\bar{x}, \bar{y})$ alors :

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

où ∇f est le gradient de f

Définition 7.3

On appelle *point critique ou point stationnaire* de f tout point où le gradient est nul.

Exemple Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

On a donc un seul point critique 0 Par ailleurs $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 0$, on en déduit que $(0, 0)$ donne un minimum (global) pour f sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple Soit l'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 - x^2 - y^2 > 0\}$. La fonction

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

est de classe C^1 sur U

On a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = 0 \iff x = y = 0$$

et $f(0,0) = 1$. Or, $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) \leq 1$, on en déduit que $(0,0)$ donne un maximum (global) pour f sur U .

Exemple

Soit la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On a $\nabla f(x,y) = (2x, -2y) = (0,0) \iff x = y = 0$. $f(0,0) = 0$. Pour $x \neq 0$ on a $f(x,0) = x^2 > 0$, et pour $y \neq 0$ on a $f(0,y) = -y^2 < 0$. Suivant les directions prises pour aller vers $(0,0)$, on rencontre en ce point soit un minimum, soit un maximum pour f.

La fonction f n'admet ni maximum, ni un minimum en $(0,0)$.

On en conclut que les points critiques peuvent encore être des extrema mais la propriété d'annuler le gradient n'est pas suffisante.

Définition 7.4

Si $(\bar{x},\bar{y})$ est un point critique qui ne donne ni un maximum local, ni un minimum local, pour f sur U , on dit que f présente un *point selle ou point col* en $(\bar{x},\bar{y})$.

Remarque L'hypothèse U ouvert de $\mathbb{R}^2$ est indispensable comme le montre l'exemple suivant. Soit la fonction $f(x,y) = x + y$ et soit $U = [0,1] \times [0,1]$. Alors $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) \leq 2$ et $f(1,1) = 2$. Ainsi f admet en $(1,1)$ un maximum global sur U. Or, les dérivées partielles de f ne sont pas nulles en $(1,1)$.

3. Nature des points critiques

Il est parfois possible de faire une étude directe et conclure sur la nature des points critiques.

Exemple Soit la fonction $f(x,y) = 10 + (x-y)^4 + (y-1)^4$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Recherchons les points critiques :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4(x-y)^3 \\ -4(x-y)^3 + 4(y-1)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (1,1).$$

Or $f(1,1) = 10$ et il est clair que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) \geq 10$. Par suite $(1,1)$ donne un minimum global pour f sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple Soit maintenant $f(x,y) = x^4 - y^2$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. $(0,0)$ est le seul point critique et on étudie la différence

$$\Delta = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = h^4 - k^2.$$

Supposons $|h|$ et $|k|$ suffisamment petits. Si $k = 0$ et $h \neq 0$, alors $\Delta = h^4 > 0$, si $h = 0$ et $k \neq 0$, alors $\Delta = -k^2 < 0$. Donc Δf change de signe sur tout voisinage de $(0,0)$. Ainsi le point $(0,0)$ donne un point col.

Par contre si l'étude directe n'est pas possible, on peut étudier la nature locale de l'extremum.

Théorème 7.5 – Condition suffisante d'extremum local ou condition du second ordre

Soit f une fonction de classe C^2 définie sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in U$ tel que $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Notons la matrice hessienne de f au point $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$D^2 f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Alors on a

- *Si $rt - s^2 > 0$ et si $r > 0$ ou $t > 0$, alors f présente au point $(\bar{x}, \bar{y})$ un minimum local sur U*
- *Si $rt - s^2 > 0$ et si $r < 0$ ou $t < 0$, alors f présente au point $(\bar{x}, \bar{y})$ un maximum local sur U.*
- *Si $rt - s^2 < 0$ alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point col pour f.*

Remarque Le théorème ne couvre pas toutes les situations, puisque si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

Exemple Nous cherchons à optimiser la fonction $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

On a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x = y = 0) \text{ ou } (x = y = 1)$$

On obtient donc deux points critiques : $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $f(A) = 0$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $f(B) = -1$.

On étudie la nature des points critiques : on obtient $r = 6x$, $t = 6y$ et $s = -3$. Donc pour le point A on a $rt - s^2 = -9 < 0$, ce point donne un point col ou point selle. Pour le point B on a $rt - s^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ et $r = 6 > 0$, ce point donne un minimum local sur $\mathbb{R}^2$. Ce minimum n'est pas global sur $\mathbb{R}^2$ car $f(-1, -1) = -5 < f(B)$.

Exemple Pour $f(x, y) = x^4 - y^2$ La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $O = (0, 0)$ est le seul point critique.

On trouve $r = 12x^2$, $s = 0$ et $t = -2$.

Pour le point $(0, 0)$ on a $rt - s^2 = 0$. Le théorème ne permet pas de conclure. On revient alors à l'étude directe pour ce cas particulier : $f(0 + h, 0) - f(0, 0) = h^4 \geq 0$. Dans ce cas la différence est positive. Sur tout voisinage de $(0, 0)$ la différence $f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0)$ change de signe et par suite f admet un point col en $(0, 0)$.

4. Cas où f est convexe

Théorème 7.6 – Extrema des fonctions convexes et concaves

Soient f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et $U \subset D_f$ un ensemble ouvert convexe. On suppose que f est de classe C^1 sur U. Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in U$.

- *Si $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ et f convexe sur U alors f présente en $(\bar{x}, \bar{y})$ un minimum global sur U .*
- *Si $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ et f concave sur U alors f présente en $(\bar{x}, \bar{y})$ un maximum global sur U .*

5. Exercices

Exercice 7.1. — Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que les extrema locaux trouvés ne sont pas des extrema globaux.

1. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

2. $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$ où'$a \in \mathbb{R}$. Discuter selon le signe de a.
3. $h(x,y) = x^4 + y^3 - 4y - 2$.
4. $k(x,y) = x^3 + x^y 2 - x^2 y - y^3$.

Exercice 7.2. — Soit $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Donner D_f l'ensemble de définition de f
2. Déterminer les points critiques
3. Etudier la convexité de f sur D_f .
4. Optimiser f sur D_f .

Exercice 7.3. — Optimiser sur D_f

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2}y + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y.$$

Exercice 7.4. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-x}$. On admet que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

1. Trouver les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle ne possède pas de maximum global.

Exercice 7.5. — Une firme (en situation de monopole) produit un unique bien qui peut être vendu à deux clients a et b. Si la firme produit la quantité Q_a d'unités de bien pour le client a, alors celui-ci est disposé à payer à payer le prix unitaire de $50-5Q_a$. Si la firme produit la quantité Q_b d'unités de bien pour le client b, alors celui-ci est disposé à payer le prix unitaire de $100-10Q_b$. Le coût pour la firme de produire Q unités de bien est $90+20Q$.

1. Que représente la fonction Π définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par
$$\Pi(Q_a,Q_b) = Q_a(50-5Q_a) + Q_b(100-10Q_b) - (90+20(Q_a+Q_b)).$$
2. Si la firme veut maximiser son profit, quelle quantité de bien doit-elle produire et vendre à chaque client ? Calculer alors le profit maximal.

Exercice 7.6. — Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 1 - \ln(x+y)$.

1. Donner D_f l'ensemble de définition de f, on admet que f est de classe C^2.
2. Montrer que f est convexe sur D_f .
3. Optimiser f sur D_f .

Exercice 7.7. — Soit $f(x,y) = x(\ln(x))^2 + xy^2$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que f admet 2 points critiques.
2. Etudier la nature de ces points critiques.

CHAPITRE 8

EXTREMA LIES

1. Définitions

Soit f une fonction définie et continue sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère un **ouvert** U, $U \subset D_f$.

Soit g une fonction définie sur $D_g \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on suppose que $U \subset D_g$.

On suppose que f et g sont de classe C^1 sur U.

Le problème est de déterminer les extrema de f sur U sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Posons $C = \{(x, y) \in U \mid g(x, y) = 0\}$, cet ensemble n'est pas un ouvert. C'est la différence avec le chapitre précédent.

Définition 8.1

Le point A est un maximum global de f sous la contrainte C si $A \in C$ et

$$\forall M \in C, \quad f(M) \leq f(A).$$

On peut définir de même un minimum global sous la contrainte C et aussi un maximum ou minimum local de f sous la contrainte C.

2. Cas d'une liaison explicite

On dit que la ***liaison est explicite*** si on peut exprimer une des variables en fonction de l'autre. On se ramène alors à un problème d'extremum sans contrainte à **une** variable.

Exemple $f(x, y) = x^2 + y$. Optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = x^3 + y = 0$.

Les fonctions f et g sont des fonctions polynômes donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

La contrainte s'écrit sous la forme équivalente : $y = -x^3$. Ainsi nous posons de façon naturelle

$$F(x) = f(x, -x^3) = x^2 - x^3.$$

Optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ revient alors à optimiser F sur $\mathbb{R}$. Nous sommes ramenés à un problème à une variable. Or $F'(x) = 2x - 3x^2$. La fonction F admet comme points critiques $x = 0$ et $x = 2/3$. On a $F''(x) = 2 - 6x$, donc $F''(0) = 2 > 0$, $F''(2/3) = -2 < 0$. Par suite F admet sur $\mathbb{R}$ un minimum local en 0 et un maximum local en $2/3$.

On en déduit que la fonction f admet sous la contrainte $x^3 + y = 0$, un minimum local en $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de valeur $f(0, 0) = 0$ et un maximum local en $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -8/27 \end{pmatrix}$ de valeur $f(2/3, -8/27) = 4/27$.

Traçons les courbes de niveau de f passant par chacun des extrema et la courbe représentative G de la contrainte. La courbe C_k de niveau k, de f, est la parabole d'équation : $y = -x^2 + k$.

Géométriquement, pour rechercher le maximum de f sous la contrainte, il nous faut trouver la courbe de niveau k le plus élevé possible rencontrant la courbe G. Mais cette courbe

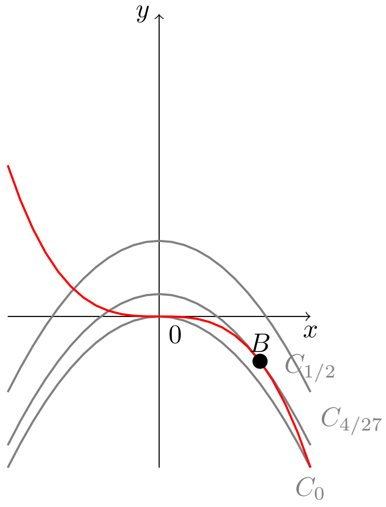


FIGURE 1. La contrainte est la courbe rouge et trois lignes de niveaux de f sont représentées. La contrainte est tangente à la ligne de niveau C_0 en 0 et à la ligne de niveau $C_{4/27}$ en B.

de niveau ne peut pas couper la courbe G, car s'il en était ainsi, il existerait d'autres courbes de niveau, de valeur plus élevée, coupant également la courbe G. En d'autres termes, la courbe de niveau maximale doit rencontrer la courbe G sans la couper, ce qui revient à dire qu'elle doit être tangente à la courbe G au point correspondant au maximum. Donc, en ce point, les tangentes aux deux courbes sont confondues. **De même pour rechercher le minimum** de f sous la contrainte, il nous faut trouver la courbe de niveau k, le moins élevé possible, tangente à la courbe G.

3. Conditions nécessaires ou conditions du premier ordre

Théorème 8.2 – Théorème des extréma liés

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
Si $(\bar{x}, \bar{y})$ est un extremum (local ou global) pour f sur U et sous la contrainte $g(x, y) = 0$, alors on a $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, et l'une des deux conditions suivantes est vérifiée

1. *soit* $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$, et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) - \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.
   On dit que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un ***point critique de première espèce***.
   On note L le *lagrangien* défini par
   $$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$
   Le réel λ est appelé *le multiplicateur de Lagrange* associé au point $(\bar{x}, \bar{y})$.
2. soit $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. On dit que $(\bar{x}, \bar{y})$ est ***un point critique de deuxième espèce***.

Remarque Les fonctions L et f coïncident sur l'ensemble C.
Remarque
— Les points critiques vérifient toujours $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.
— Les points critiques de deuxième espèce sont en plus des points critiques pour la fonction g associée à la contrainte.
— Les points critiques de première espèce sont les points critiques du lagrangien et ne sont pas des points critiques de g.

Remarque La valeur de λ peut être nulle : cela signifie qu'un point critique de f (candidat éventuel pour l'optimisation sans contrainte) vérifie la contrainte.

Exemple Le but est d'optimiser $f(x,y) = x$ sur $\mathbb{R}^2$ et sous la contrainte $g(x,y) = x^2+y^2-2 = 0$. Les fonctions f et g sont des fonctions polynômes donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Nous commençons par rechercher les points critiques de seconde espèce. Ces points vérifient :

$x^2+y^2-2=0$ et $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or seul le point $(0,0)$ annule le gradient de g et comme $g(0,0) \neq 0$, ce point ne vérifie pas la contrainte. On en déduit qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce.

Puis on recherche les points critiques de première espèce. Le lagrangien du problème est :

$$L(x,y,\lambda) = x - \lambda(x^2+y^2-2).$$

Le système des conditions nécessaires revient à écrire que le gradient de L est nul c'est-à-dire on recherche les extrema libres de L:

$$\begin{cases} 1-2\lambda x & = & 0, \\ -2\lambda y & = & 0, \\ x^2+y^2-2 & = & 0. \end{cases}$$

La deuxième équation donne $\lambda = 0$ ou $y = 0$. Si $\lambda = 0$, la première équation est impossible ainsi on a $y = 0$. On reporte donc dans la dernière équation et on obtient $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. La première équation donne alors $\lambda = 1/(2x)$.

On trouve finalement deux points critiques de première espèce :

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\ B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \end{cases}$$

Attention Il ne faut jamais oublier de donner le coefficient de Lagrange λ dans un point critique de première espèce.

La nature des points critiques obtenus sera déterminé au prochain paragraphe.

Exemple Nous cherchons à optimiser $f(x,y) = xy$ sur $\mathbb{R}^2$ sous la contrainte $g(x,y) = x^2+y^2+3xy = 0$. Les fonctions f et g sont des fonctions polynômes donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Nous commençons par rechercher les points critiques de seconde espèce. Ces points vérifient :

$$\begin{cases} x^2+y^2+3xy = 0 \\ \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2y+3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Or seul le point $(0,0)$ annule le gradient de g et comme $g(0,0) = 0$, on en déduit qu'il y a un point critique de seconde espèce.

Nous pouvons déjà remarquer que la contrainte implique : $xy = -(x^2 \ +y^2)/3 \leq 0$. Au point $(0,0)$ on a $f(0,0) = 0$ et puisque pour tout couple (x,y) vérifiant la contrainte on a $f(x,y) \leq f(0,0)$, le point $(0,0)$ donne un maximum global pour f sous la contrainte.

Puis nous cherchons les points critiques de première espèce.

Toutes les solutions du problème, différentes de $(0,0)$, seront donc des points critiques de première espèce. Le lagrangien du problème est :

$$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2+y^2+3xy).$$

Le gradient de L égal à 0 est équivalent au système

$$\begin{cases} y-\lambda(2x+3y) = 0 \\ x-\lambda(2y+3x) = 0 \\ x^2+y^2+3xy = 0 \end{cases}$$

On résout ce système en remplaçant la première équation par la différence entre les deux premières. On trouve qu'il n'y a pas de solution à part $(0,0)$. Le problème est donc résolu.

4. Conditions suffisantes

Il s'agit de donner des conditions qui permettent de déterminer la nature des points critiques de premier espèce.

4.1. Conditions suffisantes sur le lagrangien.

— On a

Théorème 8.3 – Conditions suffisantes d'extremum local

Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un point critique de première espèce, soit λ le multiplicateur de Lagrange associé et soit $L_\lambda(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$.

Si $(\bar{x}, \bar{y})$ est un extremum global (resp. local) de L_λ sur U alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est aussi un extremum global (resp. local) de même nature (max, min) de f sur U sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Preuve Plaçons nous dans le cas d'un maximum global sur U.
Soit $L(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ puisque $(\bar{x}, \bar{y})$ est un maximum pour L, on a

$$\forall (x, y) \in U, L(x, y) \leq L(\bar{x}, \bar{y}),$$

ce qui s'écrit par définition de L :

$$f(x, y) - \lambda g(x, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) - \lambda g(\bar{x}, \bar{y}).$$

L'inégalité est vraie pour tout (x, y) dans U, donc *a fortiori* pour tout (x, y) dans U vérifiant la contrainte. Si $g(x, y) = g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, on tire de l'inégalité ci-dessus : $f(x, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y})$.

Ainsi $(\bar{x}, \bar{y})$ donne bien un maximum global pour f sur U sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Remarque Ce théorème est fondamental. Il montre tout l'intérêt de la notion de lagrangien. Si le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est un extremum libre du lagrangien, c'est un extremum de même nature (max, min, local ou global) de f sous la contrainte. Par contre, si le point critique n'est pas un extremum pour L_λ, alors on ne peut rien conclure pour notre problème avec contrainte.

Lorsque f et g sont de classe C^2, on peut utiliser la hessienne pour déterminer un extremum local. D'où le résultat suivant

Proposition 8.4

On suppose f et g C^2 sur U. Soit $A = (\bar{x}, \bar{y})$ un point critique de première espèce et soit λ le multiplicateur associé. Posons $L_\lambda(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$.
On note

$$D^2 L_\lambda(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

1. *Si $(rt - s^2 > 0$ et $(r > 0$ ou $t > 0))$ alors $(\bar{x}, \bar{y})$ donne un minimum local pour f sous la contrainte C.*
2. *Si $(rt - s^2 > 0$ et $(r < 0$ ou $t < 0))$ alors$(\bar{x}, \bar{y})$ donne un maximum local pour f sous la contrainte C*

4.2. Conditions suffisantes d'extremum global.

— Si le lagrangien est convexe ou concave sur U, on déduit le résultat suivant :

Proposition 8.5 – Conditions suffisantes d'extremum global

Soient $(\bar{x}, \bar{y})$ un point critique de première espèce du problème , U un ensemble convexe, et λ le multiplicateur associé. Posons le lagrangien $L_\lambda(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$.

1. *Si L_λ est convexe sur U alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimum global de f sous la contrainte C.*
2. *Si L_λ est concave sur U alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est un maximum global de f sous la contrainte C.*

Remarque On ne pourra pas conclure sur la nature du point $(\bar{x}, \bar{y})$ dans chacun des deux cas suivants :

1. L_λ n'est ni convexe ni concave sur U.
2. $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point col de L_λ.

Exemple Optimiser $f(x, y) = -x^2 + 4y^2$ sous la contrainte $g(x, y) = x + 2y^2 - 2 = 0$.
Les fonctions f et g sont des fonctions polynômes donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
Résolvons le problème de deux façons différentes pour comparer les résultats.

1. **En explicitant la contrainte**.

   Celle-ci peut s'écrire de la façon suivante $x = 2 - 2y^2$. On est alors ramené à optimiser la fonction d'une seule variable :

   $$F(y) = 4y^2 - (2 - 2y^2)^2 = -4y^4 + 12y^2 - 4.$$

   La fonction F est dérivable et pour tout réel y

   $$F'(y) = -16y^3 + 24y = -8y(2y^2 - 3).$$

   Cette fonction admet un minimum local en $y = 0$ et un maximum global atteint pour les deux points $y = \sqrt{3/2}$ et $y = -\sqrt{3/2}$. Grâce à un tableau de variations on peut voir que le maximum est global.

   On en déduit que le point $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne un minimum local pour f sous la contrainte et les points $B = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3/2} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3/2} \end{pmatrix}$ donnent un maximum global pour f sous la contrainte.

2. **En utilisant le lagrangien**

   Comme le gradient de la contrainte ne s'annule jamais, les seuls points candidats sont les points critiques du lagrangien $L(x, y, \lambda) = -x^2 + 4y^2 - \lambda(x + 2y^2 - 2)$. d'où le système

   $$\begin{cases} -2x - \lambda = 0, \\ 8y - 4\lambda y = 0, \\ x + 2y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

   On retrouve : $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = -4$, et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3/2} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3/2} \end{pmatrix}$ avec $\lambda = 2$.

   — Pour λ= 2 : on a $L(x, y) = -x^2 - 2x + 4 = h(x)$. Par calcul de la hessienne, on obtient que

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 L(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   on a $rt - s^2 = 0$ et $r + t < 0$ donc L est une fonction concave sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit que les deux points B et C donnent un maximum global, de valeur 5, pour f sous la contrainte.

— Pour $\lambda = -4$: on a $L(x, y) = -x^2 + 12y^2 + 4x - 8$. On a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \nabla^2 L(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix},$$

Le lagrangien L n'est ni convexe, ni concave sur R^2 ni même localement au voisinage du point A. On ne peut donc pas conclure.

5. Optimisation sur un compact

On a un théorème analogue à celui des fonctions continues d'une variable sur un intervalle fermé borné. Le théorème suivant sera admis. ‘

Théorème 8.6 – Compact

Toute fonction **continue** *sur une partie K* **fermée bornée** *donc* **(compacte)** *de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, admet un maximum global et un minimum global sur K, c'est-à-dire : $\exists M_1 \in K$ et $\exists M_2 \in K$ tels que :*

$$\forall X \in K, \ f(M_1) \leq f(X) \leq f(M_2).$$

Exemple On reprend un exemple précédent : optimiser $f(x, y) = x$ sur $\mathbb{R}^2$ et sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$.

Posons $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ | x^2 + y^2 - 2 = 0\}$. L'ensemble C est un cercle donc C est un ensemble fermé et borné. On a vu que seuls les points $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = 1/(2\sqrt{2})$ et $B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = -1/(2\sqrt{2})$ sont des points critiques de première espèce et donc pouvaient donner des extrema pour f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Or $f(A) = \sqrt{2}$ et $f(B) = -\sqrt{2}$. On déduit donc que le maximum global sous la contrainte est atteint en A et le minimum global en B.

Exemple Optimiser $f(x, y) = xy$ sur E où

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}.$$

Les fonctions f et g sont des fonctions polynômes donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. L'ensemble E est la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 2 donc E est un ensemble compact.

L'intérieur de E est

$$\overset{\circ}{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

Comme $\overset{\circ}{E}$ est un ouvert, on détermine le ou les points critiques en annulant le gradient de f ce qui donne un unique point $(0, 0)$. Or en ce point, la hessienne vaut

$$\nabla^2 L(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ce point donne un point col pour f ($r = t = 0$ et $s = 1$). Il n'y a pas donc pas d'extremum sur l'intérieur de E.

On recherche maintenant des extrema sur la frontière de E, notée $Fr(E)$. On a

$$Fr(E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2 = 0\}.$$

On a $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ nul en $(0, 0)$, point qui ne vérifie pas la contrainte donc pas de point critique de deuxième espèce .

Le lagrangien s'écrit : $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 2)$. Le système des conditions nécessaires est :

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x(1 - 4\lambda^2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $x = 0$ ou $1 - 4\lambda^2 = 0$. La solution $x = 0$ entraîne $y = 0$ mais $(0, 0)$ ne vérifie pas la contrainte. Seule la solution $\lambda^2 = 1/4$ convient. On obtient 4 points critiques

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1/2 \\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1/2 \\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -1/2 \\ D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -1/2 \end{cases}$$

Or, comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc sur le compact E, on peut appliquer le théorème : $f(A) = f(B) = 1$ et $f(C) = f(D) = -1$. Par suite A et B donnent un maximum global pour f sous la contrainte, C et D donnent un minimum global.

6. Exercices

Exercice 8.1. — Montrer que les fonctions suivantes sont convexes sur $\mathbb{R}^2$. Optimiser ces fonctions sur $\mathbb{R}^2$, puis sous la liaison $x + y = 0$.

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3$,
2. $g(x, y) = (x^2 + y^2) + e^{(x^2+y^2)}$.

Exercice 8.2. — Soient les fonctions f et g définies par : $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

1. Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$ et sous la contrainte $g(x, y) = 2/3$
2. Déterminer les extremums de g sur D_g et sous la contrainte $f(x, y) = 9$.

Exercice 8.3. — Soit la fonction h définie par $h(x, y) = -x^2 - 4y^2$. Déterminer les extrema de h sur $\mathbb{R}^2$ et sous la contrainte $x + 2y^2 - 2 = 0$.

Exercice 8.4. — Déterminer les extrema (locaux et/ou globaux) de la fonction suivante sur son domaine de définition et sous la contrainte indiquée

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ sous la contrainte } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0.$$

***Exercice 8.5* ((Extrait examen 2018)).** — Soient deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (x - 1)^2(y - 1) - (y - 1)^2(x - 1) \text{ et } g(x, y) = 1 - y + x.$$

Calculer le(s) extrema (global ou local) de f sous la contrainte que $g(x, y) = 0$.

Exercice 8.6. — On considère les sous ensembles

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$C_o = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ x^2 + y^2 < 1\},$$

1. Montrer que C_o est un ouvert et que C est un compact.
2. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 3 - 6x$. Déterminer les extrema de f sur C.

Exercice 8.7. — On considère les fonctions f et g définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^4 + y^4 \text{ et } g(x,y) = x + y - 2.$$

On admet que f et g sont C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

1. Vérifier qu'il n'y a qu'un seul point A susceptible de donner un extremum pour f sous la contrainte $g(x,y) = 0$. Calculer $f(A)$.
2. Quelle est la nature du point critique A ?

Exercice 8.8. — Soit $\mathcal{U} = \{((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x > 0,\ \text{ et } y > 0\}$ et $\mathcal{E} = \{((x,y) \in \mathcal{U},\ \ x + y = 1\}$.

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathcal{U}$ par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x\ln(x) + y\ln(y).$$

   On admet que f est de classe C^2 sur $\mathcal{U}$.

   (a) Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathcal{U}$.

   (b) Vérifier qu'il n'y a qu'un seul point A susceptible de donner un extremum pour f sur $\mathcal{E}$.

   (c) Montrer que le point A donne un extremum global pour f sur $\mathcal{E}$.