Travaux Pratiques 3 : Correction

Exercice 2 (Exercice bonus) Population de lapins

Question 2.1 Pour $n \geq 1$:

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} + j_{n-1}, \\ j_n = p_{n-1}. \end{cases}$$

Question 2.2 En utilisant la seconde relation ci-dessus, on peut remplacer un élément de la suite (j_n) par un élément de la suite (p_n) (celui correspondant à l'instant précédent). On peut également faire l'inverse. En appliquant cette transformation dans un sens ou l'autre à la première relation ci-dessus, on obtient après simplification, pour $n \geq 2$:

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, \\ j_n = j_{n-1} + j_{n-2}, \end{cases}$$

Question 2.3 Par somme des deux relation précédentes, on obtient:

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}.$$

Question 2.4 Examinons tout d'abord ce qui se passe aux instants 0 et 1 (en utilisant l'état initial donné par l'énoncé et les formules de la question 2.1).

n	p_n	j_n	l_n
0	1	0	1
1	1	1	2

En utilisant ces conditions initiales et les formules des questions 2.2 et 2.3, on en déduit par récurrence que pour tout entier n, on a $j_n = f_n$, $p_n = f_{n+1}$ et $l_n = f_{n+2}$.

Question 2.5 Dans ce modèle de population, on a en permanence deux variables p_n et j_n qui permettent de stocker les valeurs de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci. On peut ainsi transformer la récurrence double qui définit (f_n) en une récurrence simple (c'est-à-dire dépendant seulement de l'instant précédent) portant sur deux suites (p_n) et (j_n) liées entres elles. De même, aussi bien dans l'algorithme itératif de la question 1.2 que dans la méthode récursive améliorée de la question 1.3, on considère en pratique la suite des couples (f_n, f_{n-1}), qui permet de se ramener à une récurrence simple du type:

$$(f_{n+1}, f_n) = g(f_n, f_{n-1}),$$

en posant $g(y, x) = (x + y, y)$.