

Travaux Pratiques 3

Exercice 1 Suite de Fibonacci

La définition de la suite de Fibonacci est la suivante :

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ 1 & \text{si } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Question 1.1 Écrivez un algorithme récursif **fibonacci_rec** qui, étant donné un entier n , calcule f_n .

Question 1.2 L'algorithme itératif ci-dessous (Algorithme 1) permet aussi de calculer f_n .

Algorithme 1 : fibonacci_it(n)

```
si n = 0 alors
    retourner 0
sinon
    x ← 0
    y ← 1
    pour i = 2 à n faire
        temp ← x + y
        x ← y
        y ← temp
    fin
    retourner y
fin
```

Écrivez une fonction **fibonacci_it** qui implante l'Algorithme 1. Vérifiez que les deux fonctions **fibonacci_rec** et **fibonacci_it** retournent bien la même valeur, puis comparez le temps d'exécution de ces deux fonctions pour différentes valeurs de n .

Question 1.3 Écrivez une fonction récursive **_fibonacci_smart_rec_aux** qui, étant donné un entier $n \geq 1$, renvoie la paire (f_n, f_{n-1}) . En exploitant cette fonction auxiliaire, écrivez une fonction **fibonacci_smart_rec** qui, étant donné un entier n , renvoie f_n . Comparez son résultat et son temps de calcul à ceux des fonctions précédentes pour différentes valeurs de n .

Exercice 2 (Exercice bonus) Population de lapins

On considère un modèle simplifié de l'évolution d'une population de lapins. Comme ceux-ci se reproduisent rapidement (en comparaison de leur durée de vie), on suppose que sur l'intervalle de temps considéré, il n'y a que des naissances et aucun décès.

À chaque instant entier n , on note p_n le nombre de couples de lapins pubères et j_n le nombre de couples de lapins juvéniles, qui ne peuvent pas encore procréer. À l'instant $n = 0$, il y a seulement un couple de lapins pubères. Entre l'instant $n - 1$ et l'instant n :

- chaque couple de lapins qui étaient pubères à l'instant $n - 1$ donne naissance à un couple de lapins juvéniles,
- tous les lapins qui étaient juvéniles à l'instant $n - 1$ deviennent des lapins pubères.

Question 2.1 Donnez des relations de récurrence reliant les suites (p_n) et (j_n) .

Question 2.2 Déduisez-en une relation de récurrence portant uniquement sur la suite (p_n) , et une autre portant uniquement sur la suite (j_n) .

Question 2.3 En notant l_n le nombre total de couples de lapins à l'instant n , donnez une relation de récurrence pour la suite (l_n) .

Question 2.4 Exprimez p_n , j_n et l_n en fonction des éléments de la suite de Fibonacci (f_n) .

Question 2.5 Quelle analogie voyez-vous entre ce modèle de population et les algorithmes des questions 1.2 et 1.3 ?