Travaux dirigés 4

Rappels de cours *Soit T un arbre binaire de recherche dont chaque élément est rouge ou noir. Si T satisfait les propriétés suivantes alors c'est un* arbre rouge-noir *:*
1) Si $x \in T$ est rouge ses deux fils sont noirs ;
2) La définition suivante de la fonction hauteur noire *hn sur T est consistante :*

$$hn(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ n'a pas deux fils,} \\ hn(y) & \textit{si } x \textit{ a un fils } y \textit{ rouge,} \\ hn(y)+1 & \textit{si } x \textit{ a un fils } y \textit{ noir.} \end{cases}$$

Exercice 1 Montrer que si T est rouge-noir, alors tout $x \in T$ noir a un frère et tout fils unique n'a pas de fils. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 Donner un arbre binaire dont chaque élément est rouge ou noir satisfaisant la propriété (1) mais pas (2) ; et inversement.

Exercice 3 Soit $n(x, y)$ le nombre de descendants noirs de x ancêtres de y. Montrer que hn est bien définie si et seulement si pour tout couple (y_1, y_2) de descendants feuilles de x :
a) $n(x, y_1) = n(x, y_2)$ si y_1 et y_2 ont la même couleur, et
b) $n(x, y_1) = n(x, y_2) + 1$ si y_1 est rouge et y_2 est noir.

Exercice 4 $\star$ *Application des arbres rouge et noir.* Soient un entier b et des entiers $a_1, \ldots, a_n$. Décrire un algorithme en $\Theta(n \log n)$ qui dit s'il y a deux entiers a_i, a_j dont la somme vaut b.