# CHAPITRE M VII

# Applications

J.M. Janod

Je remercie ici mes collègues qui ont accepté de participer à la mise en place de ce cours en première année du DEUG GEA à l'Université Paris IX Dauphine. Je mesure parfaitement le travail qu'ils ont effectué, et j'ai apprécié particulièrement l'état d'esprit et l'enthousiasme de chacun. Je ne saurais oublier les étudiants qui verront, je l'espère, ce dernier chapitre justifier tous leurs efforts en illustrant l'emploi qu'ils pourront faire de Maple. Enfin je tiens à remercier Monsieur J.M. Renaud qui a accepté de relire, de corriger, et d'effectuer la mise en page de tous les polycopiés la première année ainsi que Monsieur Leduc qui m'a signalé les erreurs.

Ce chapitre aborde quelques thèmes du calcul scientifique nécessaires au DEUG de Gestion et Economie Appliquée. Classiquement, la littérature Maple consacre un ou plusieurs chapitres aux thèmes présentés ici. Ce chapitre n'est donc qu'une simple initiation. Les étudiants pourront se référer à l'aide en ligne et aux ouvrages spécialisés afin de résoudre leurs problèmes mathématiques.

## ▼ Les Polynômes

- **Rappel Mathématiques**

Un polynôme de degré n en x est
+...+ avec un nombre quelconque et non nul.
On dit que c'est un polynôme à une indéterminée x.

Les polynômes reposent uniquement sur la multiplication et l'addition, opérations élémentaires acquises à l'école du même adjectif. Avec la division on peut donc prétendre savoir calculer, en plus des polynômes, les fractions rationnelles (quotient de deux polynômes) et donc les fonctions rationnelles(x->une fraction rationnelle). Or de nombreuses fonctions, qui ne sont pas des polynômes, sont fort utiles dans la vie pratique. Citons par exemple le rapport entre les cotés d'un triangle rectangle qu'on appelle cosinus ou sinus ou tangente d'un des angles. Les calculs de telles fonctions (qui ne sont pas des polynômes ou des quotients de polynômes) sont d'une grande difficulté et complexité sans calculateur. Par exemple le cosinus peut être déterminé en dessinant le triangle en mesurant les longueurs aux erreurs de mesure près puis en divisant les longueurs mesurées (Thalès). Les mathématiciens ont apporté une aide considérable au calcul d'une fonction, grâce à des théories permettant d'approximer la fonction par un polynôme qui est techniquement calculable. La qualité de l'approximation est en général fonction du degré du polynôme. Citons la formule de Taylor ou les développements limités, le développement d'une fonction en série entière, fonctions qui peuvent s'écrire comme une série de monômes (cosinus, sinus, exponentiel...).

Ce rappel mathématique montre que tout logiciel de calcul scientifique doit fournir des méthodes nombreuses et efficaces sur les polynômes. Ces logiciels traitent aussi les polynômes à deux ou plusieurs indéterminés par exemple: (soit une somme de termes de la forme ).

- **Maple et les polynômes**

Maple permet de mémoriser un polynôme ou une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) dans une mémoire par simple affectation, et reconnaît les polynômes dont le type est **polynom**. Ainsi est, pour Maple un polynôme de degré 2 en t, mais sera considéré comme un polynôme à deux indéterminées t et a si a n'est pas affecté. Heureusement les méthodes offertes par

Maple permettent de préciser l'indéterminée souhaitée dans le traitement. On peut tester le type polynôme en utilisant la fonction type.

**type(**le polynôme,**polynom**(type des coefficients, l'indéterminée si nécessaire))

On dispose notamment des fonctions suivantes :

- **factor**(polynôme) permet de factoriser un polynôme.
- **simplify** (polynômes ou fraction rationnelle) simplifie le polynômes ou la fraction rationnelle.
- **expand(**polynômes ou fraction rationnelle) développe le(s) polynôme(s) de l'expression.
- **normal**(fraction rationnelle) met la fraction rationnelle sous forme de quotient de polynômes premiers entre eux à coefficients entiers.
- **normal**(fraction rationnelle, `expanded`) même chose avec développement.
- **degree**(polynôme) donne le degré du polynôme.
- **coeff**(polynôme,x,i) donne le coefficient du monôme x^i.
- **sort**(polynôme)  trie suivant les puissances croissances, le polynôme d'origine étant modifié.
- **numer**(fraction rationnelle) donne le numérateur de la fraction.
- **denom**(fraction rationnelle) donne le dénominateur des fractions rationnelles.
- **solve**(eq,{x}) ou **fsolve** résout l'équation eq par rapport à x et donne les solutions.
- **subs**(indéterminé = valeur, polynôme) calcule le polynôme pour la valeur donnée.
- **limit**( fraction rationnelle, x= valeur, option) calcul la limite quand x tend vers la valeur qui annule le dénominateur. les options comprennent notamment right, left pour limite à droite, limite à gauche.
- **limit**(polynôme ou fraction rationnelle, 'x'=infinity) donne la limite quand x tend vers l'infini respecter les quotes.

• **Note sur solve**
La commande solve cherche à déterminer les solutions d'un polynôme mais aussi d'un système d'équations. Lorsque les solutions sont compliquées, Maple introduit des **%1**, %2, etc puis indique les valeurs correspondantes. Parfois compte tenu de la complexité des solutions elle peut afficher les solutions simples et indiquer que les autres sont les racines d'une expression qu'elle donne (**RootOf(expression)**). Si cette expression n'a pas de variables non assignée, on peut obtenir les valeurs avec **allvalues(expression)**. D'autre part certaines fonctions acceptent d'utiliser comme paramètre **RootOf** .

• **Note sur subs**
Lors de la résolution d'équations à plusieurs variables (polynômes à plusieurs indéterminées) les solutions sont indiquées sous la forme {x=valeur, y=valeur,..}, x et y sont un simple jeu d'écriture et ne correspondent pas à une affectation de ces variables. Pour obtenir les différentes valeurs on utilise subs (plus facile que op) ainsi **subs(",y)** donne la valeur de y.

```
>    ### WARNING: ldegree(0,x) now returns infinity
  p:=31*x^2*x+21*x^4+a;type(p,polynom(integer));coeff(p,x,2);
  coeffs(p);coeffs(p,x);ldegree(p);lcoeff(p,x);
```

```
> subs(x=1,p);
> sort(p,x);p;
> pprime:=diff(p,x);
> S:=[fsolve(%,x)];
> seq(subs(x=i,pprime),i=S);
> factor(pprime);
> expand(%);
> g:=(x^2-y^2)/(x-y)^3;
> numer(g);denom(g);
> simplify(g);
> normal(g);normal(g,expanded);
> limit(g,x=y);
> z:=(x-1)^2/(x^2-1);
> limit(z,x=1);limit(z,'x'=infinity);limit(z,x=-1,left);limit
(z,x=-1,right);
```

```
> plot(z,x,y=-5..5);#comme le montre le graphe.
```

```
> solve(x^3-x^2+1);
```

```
> solve(x^5-3*x^4+2*x^2-x+3,x);
```

```
> allvalues(%);
```

```
> s:=solve({x-y=2,x+y=3});subs(s,y);
```

## Le développement de Taylor

On dispose de la fonction **taylor** permettant d'obtenir la série de Taylor d'une expression. Sa syntaxe est:

**taylor**(exp, variable, ordre)

ou encore pour un développement au voisinage d'une valeur

**taylor**(exp,variable=valeur, ordre).

Taylor donne une approximation polynomiale avec des coefficients numériques, si c'est possible. Or on peut obtenir une approximation polynomiale avec des coefficients dépendant de x mais dont la croissance est inférieure au polynôme x. Ce type d'approximation est obtenu avec la commande **series** que conseille Maple quand **taylor** ne donne pas de résultat.

```
> taylor(exp(x),x,5);
```

```
> taylor(1/x^2,x=1,6);
```

## L'intégration

Maple permet aussi de calculer les intégrales très facilement. Il existe deux commandes, **int** et **Int**. Avec un i minuscule (int), on obtient le calcul de l'intégrale qui fournit soit la primitive pouvant contenir les bornes formelles soit la valeur lorsque les bornes sont précisées et numériques. La syntaxe est

**int(**expression en x, x**)**

donne la primitive si elle existesinon l'écriture de l'intégrale

ou

**int(**expression en x, x=a..b**)**

avec a et b pour les bornes d'intégration

donne la valeur si les bornes sont numériques ou une expression si la primitive existe.

Avec **Int** la syntaxe est la même mais le résultat est donné avec l'écriture sous forme d'intégrale. Int est simplement l'appel de int sans évaluation.

Signalons la commande **diff ou D** déjà utilisée qui permet le calcul des derivées (voir l'aide).

```
> f:=x->x^2;Int(f(t),t=1..x)=int(f(t),t=1..x);
```

```
> f:=x->exp(-1/2*x^2)*ln(x):int(f(t),t);int(f(t),t=-infinity.
.0);#pour bien apprécier essayer de faire le calcul à la main
```

```
> D(f);
```

# L'optimisation

L'optimisation est incontournable dés le premier cycle d'économie. Avec les méthodes de résolutions (solve) de dérivation (diff ou D) et la mémorisation des équations, l'étudiant peut avec Maple effectuer tous ses calculs, comme il les fait sur une feuille de papier. Mais il peut directement par une simple commande obtenir les solutions selon la méthode du Lagrangien!

La commande est **extrema** mais n'est pas directement accessible, elle doit être chargée par la commande suivante:

readlib(extrema).

La syntaxe de extrema est:

**extrema**(expression à optimiser,{séquence des contraintes},{séquence des variables},'solution');

ou

**extrema**(fonction ojectif,ensemble des contraintes,ensembles des variables,'solution');

extrema retourne la valeur de la fonction ou de l'expression à l'optimum. les solutions sont affectées au troisième paramètre qui doit être une variable non affectée( d'ou les quotes). Ce troisième paramètre est facultatif mais permet d'avoir les valeurs des variables au point optimum.

Exemple économique : maximisation de l'utilité du consommateur sous contrainte budgétaire

Le consommateur maximise son utilité, fonction des consommations C1 et C2 :

La contrainte budgetaire est :

où P1, P2 sont les prix des deux biens, R le revenu disponible.

```
> readlib(extrema):extrema(C1**(alpha)*C2**(beta),{P1*C1+P2*
C2=R},{C1,C2},'sol');# on obtient la valeur de la fonction
objectif U à l'optimum
```

```
> sol;#on obtient les valeurs des consommations à l'optimum
```

```
> extrema(x^2,{});#Pas de contrainte, x est la variable par
défaut
```