Correction : Examen

Exercice 1 (4 points: 2+2)

1) Le tableau `solution` vaut:

```
0 2 4 1 3
0 3 1 4 2
1 3 0 2 4
1 4 2 0 3
2 0 3 1 4
2 4 1 3 0
3 0 2 4 1
3 1 4 2 0
4 1 3 0 2
4 2 0 3 1
```

(les 5 derniers se déduisent par symmétrie).

2) `diag2=[true,true,true,true,false,false,false,true,true]`.

Exercice 2 (5 points: 1+1+1+1+1)

1) `algo(0)=1`, `algo(2)=4`, `algo(2)=18`, `algo(4)=84`, `algo(8)=392`.

2) $\Theta(n \log n)$ car $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

3) Avec `x=algo(n/2)+algo(n/2)+algo(n/2)+algo(n/2)`, on a $\Theta(n^2)$ car $T(n) = 4T(n/2)+\Theta(n)$.

4) Deux réponses possibles : soit (a) Impossible même avec `x=4*algo(n/2)` car $f(n) = \Omega(n)$, soit (b) il faut de plus remplacer la boucle `for` par `x+=n*(n-1)` pour avoir $\Theta(\log n)$ car $T(n) = T(n/2) + O(1)$.

5)Avec `x=algo(n/2)+algo(n/2)+2*algo(n/2)`, on a $\Theta(n^{\log_2 3})$ car $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n)$.

Exercice 3 (4 points: 1+1+2)

1) Supposons que ce soit faux et choisissons un contre-exemple avec n minimum. On a alors $n \geq 2$ et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \notin \{1, \ldots, n-1\}$; c'est impossible.

2) Pour tout x, il existe un unique entier k tel que $x \in \{2^k, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$. Il suffit de montrer que $p^k(x) = 1$. Par induction sur k: C'est vrai pour $k = 1$ et, pour tout $x \in \{2^{k+1}, \ldots, 2^{k+2} - 1\}$, on a $p(x) = \lfloor x/2 \rfloor = 2^k$, donc $p^{k+1}(x) = 1$.

3) $p(x) = x - 1$.

Exercice 4 (4 points: 2+2)

1) (2,7,8,8,13,51,71,16,55,45,46).

2) Donnez au tableau une structure de tas-min en $O(n \log n)$, puis tant que le tas min n'est pas vide, empiler la racine que l'on remplace par le dernier élément que l'on entasse pour retrouver la structure de tas-min en $O(\log n)$. Puisqu'il y a $O(n)$ passages dans la boucle while, la complexité est $O(n \log n) + O(n) \times O(\log n) = O(n \log n)$.

Exercice 5 (3 points)
On représente `mat` par un échiquier de $n \times n = 100$ cases de taille 1×1. Initialement on a au plus $x = 9$ cases `true`. Lors des modifications de `mat`, le périmètre de l'aire des cases `true` est (non-strictement) décroissant. Avec $x = 9$ l'aire de la surface des cases `true` est initialement $\leq 4 \times 9 = 36$ or l'aire de l'échiquier est 40. Toutes les cases ne peuvent donc devenir `true`.