Rattrapage

Vous pouvez utilisez la procédure de l'exercice 2 dans l'exercice 3 ainsi que les procédures des questions précédentes dans l'exercice 3.

Exercice 1 Soit $T(n)$ le temps d'exécution d'un algorithme en fonction de n satisfaisant $T(n) = 16T(n/2)+f(n)$. Donnez la valeur asymptotique $\Theta(\cdot)$ de $T(n)$ dans les cas suivant :
1) $f(n) = \frac{n^4}{8}$;
2) $f(n) = 3n^2 + 4\lg n$;
3) $f(n) = n^5 + 7n^2$.

Exercice 2 Donnez le code Java d'un algorithme `double pow(int x, int n)` qui éleve x à la puissance n et dont la complexité est $O(\lg n)$. Démontrer que la complexité de votre algorithme est bien $O(\lg n)$.

Exercice 3 Soit n une puissance de 2. Soient N et M deux entiers n-digits à multiplier, et on pose $N = a \times 10^{n/2} + b$ et $M = c \times 10^{n/2} + d$ avec a,b,c,d des nombres entiers $\frac{n}{2}$-digits.

1) Donnez les valeurs de n et a,b,c,d pour $M = 1246$ et $N = 4589$.

2) Donnez une procédure Java `int A(int M, int n)` qui renvoie la valeur de a en fonction de l'entier M de n-digit.

3) Donnez une procédure Java `int B(int M, int n)` qui renvoie la valeur de b en fonction de l'entier M de n-digit.

4) Montrer l'égalité $NM = ac \times 10^n - ((a-b)(c-d) - ac - bd) \times 10^{n/2} + bd$ pour tous les couples d'entiers N,M.

5) Montrer l'égalité $NM = ac \times 10^n + ((a+b)(c+d) - ac - bd) \times 10^{n/2} + bd$ pour tous les couples d'entiers N,M.

6) En utilisant l'une de ces deux égalités donnez le code Java d'une procédure récursive `int Mult(int M, int N, int n)` qui retourne le produit de deux nombres entiers N et M de n-digits.

7) Expliquez le choix de votre égalité.

8) Donnez l'équation de récurrence du temps d'exécution $T(n)$ de `int Mult(int M, int N, int n)`.

9) En déduire la complexité de `int Mult(int M, int N)`.

10) Comment étendre son utilisation quand n n'est pas une puissance de 2 en gardant la même complexité ?