Examen 1h30

Exercice 1 1) Donnez le code java d'une fonction récursive `pgcdR (int a, int b)` retournant le plus grand commun diviseur de deux entiers a et b.

2) Donnez le code java d'une fonction itérative `pgcdI (int a, int b)` retournant le plus grand commun diviseur de deux entiers a et b.

Exercice 2 1) Dire rapidement pourquoi le temps d'exécution $T(n)$ de algorithme de Strassen pour calculer le produit AB de deux matrices $n \times n$ satisfait-il l'équation $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$? En déduire que sa complexité est $\Theta(n^{\log_2 7})$.

2) On définit maintenant la multiplication sur l'ensemble des couples (A,B) de matrices $n \times n$ de la manière suivante:

$$(A,B) \times (C,D) = (AC - BD, AD + BC)$$

Montrez comment calculer ce produit en effectuant que trois produits de matrices au lieu de quatre. Quel est le gain au niveau de la complexité ?

Exercice 3 Soit l'algorithme récursif suivant appelant une procédure appelée `trouble(n)`, dépendant du paramètre entier n mais ne le modifiant pas, de complexité finie $f(n)$.

`algo`(n)
 Si $n = 1$ retourner 1
 Exécuter `trouble`(n)
 Retourner `algo`$(n/2)$+`algo`$(n/2)$+`algo`$(n/2)$+`algo`$(n/2)$

1. Quelle est la valeur retournée par `algo`(8) ?
2. Soit un entier k. Quelle est la valeur retournée par `algo`(2^k) ?
3. Donnez la complexité $\Theta(\cdot)$ de l'algorithme, en utilisant un théorème vu en cours, lorsque:
   (a) $f(n) = 5n + 1$;
   (b) $f(n) = 4n^2 + 3n$;
   (c) $f(n) = \frac{n^4}{2} + 5$.
4. Modifier `algo`(n) pour qu'il retourne la même valeur mais en $\Theta(\log n)$.
5. Démontrer votre réponse à la question 2.

Exercice 4 Soit (T,r,p) avec T un ensemble fini non vide, $r \in T$, et p une fonction de $T \setminus \{r\}$ dans T. Pour toute fonction p et tout entier k, on définit la fonction:

$$p^k(x) = \begin{cases} x & \text{si } k = 0 \\ p(p^{k-1}(x)) & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

On dit que (T,r,p) est un arbre si pour tout $x \in T \setminus \{r\}$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $p^k(x) = r$. Pour tout arbre (T,r,p) et tout $x \in T \setminus \{r\}$, on note $d(T,r,p,x)$ le plus petit k tel que $p^k(x) = r$. On note $h(T,r,p)$ la valeur maximum de $d(T,r,p,x)$ sur tous les $x \in T \setminus \{r\}$.

1) Montrer que $(\{1,\ldots,n\},1,\lfloor x/2 \rfloor)$ est un arbre.
2) Montrer que
$$h\big((\{1,\ldots,n\},1,\lfloor x/2 \rfloor)\big) = O(\log n).$$
3) Donner une fonction p telle que $(\{1,\ldots,n\},1,p)$ soit un arbre tel que:
$$h(\{1,\ldots,n\},1,p) = \Omega(n).$$

Exercice 5 Soit le code java suivant

```
static int salade2fruit (int poire, int mangue){
  int pomme=0;
  while (poire !=0){
    pomme +=(poire%2)*mangue;
    poire/=2;
    mangue*=2;
  }
  return pomme;
}
```

1. Quelle valeur retourne `salade2fruit(12568,1000)` ?
2. D'une manière générale, quelle valeur retourne `salade2fruit(x,y)` ?
3. Démontrer votre réponse en 2.