

Examen

Exercice 1 Donnez la complexité $\Theta(\cdot)$ de l'algorithme suivant en fonction de l'entier n en paramètre en précisant les constantes c_1 , c_2 et n_0 que vous avez utilisées.

```
public static void algo(double x, int n){
    for(int i=0;i<n;++i)
        for(int j=i;j<n;++j)
            x += j;
}
```

Exercice 2 On considère la complexité de la fonction `main` ci-dessous en fonction du paramètre d'entrée n :

```
import java.util.Random;
public class Multi{
    public static int increm(int n){if(n==0) return 0; else return ++n;}
    public static int decrem(int n){if(n==0) return 0; else return --n;}
    public static int MultiDecrem(int n, int k){
        while(n != 0 && k !=0){
            n=decrem(n);
            k--;
        }
        return n;
    }
    public static void main (String...args){
        int n = args[0];
        final int seed = args.length > 1 ?
            Integer.parseInt(args[1]) : (int) System.currentTimeMillis();
        final Random random = new Random(seed);
        int compt=n;
        while(compt--!=0){
            int alea = random.nextInt(3);
            if(alea==0) n=increm(n);
            if(alea==1) n=decrem(n);
            if(alea==2) n=MultiDecrem(n,n/2);
        }
    }
}
```

0) Après avoir taper sur un terminal la commande `javac Multi.java`, quelle est ensuite la différence entre `java Multi 50 544534` et `java Multi 50` ?

- 1) Montrer que la complexité est $\Omega(n)$ et $O(n^2)$.
- 2) Montrer que la complexité est $\Theta(n)$.

Exercice 3 Soit $T(n)$ le temps d'exécution d'un algorithme en fonction de n satisfaisant $T(n) = 27T(n/3) + f(n)$. Donnez la valeur asymptotique $\Theta(\cdot)$ de $T(n)$ dans les trois cas suivants: (vous appliquerez le théorème du cours en précisant la valeur de ε)

- 1) $f(n) = \frac{n^4}{9}$;
- 2) $f(n) = 3n^2 + 4 \lg n$;
- 3) $f(n) = n^3 + 7n^2$.

Exercice 4 Soient a, b, c, d des réels. Le produit de deux nombres complexes $x = a + ib$ et $y = c + id$ est $xy = (ac - bd) + i(ad + bc)$. Donnez un algorithme qui calcule xy en effectuant que 3 produits de deux nombres réels au lieu de 4.

Exercice 5 Donnez les codes Java de deux algorithmes `double pow1(double n, int p)` et `double pow2(double n, int p)` qui élèvent chacun n à la puissance p et dont les complexités sont respectivement $O(n)$ et $O(\lg n)$.

Exercice 6 Soit T un ensemble, $r \in T$, et une fonction p de $T \setminus \{r\}$ dans T . Montrer que T est un arbre si et seulement si $p^k(x) = x$ implique $k = 0$ pour tout $x \in T \setminus \{r\}$.

Exercice 7 Le tableau $A = 15, 13, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 0, 6, 2, 1$ est-il un tas? Elaborez un algorithme de tri d'un tableau d'entiers de complexité $O(n \lg n)$ basé sur les tas.

Exercice 8 Montrez que dans un arbre rouge-noir la hauteur noire d'un sommet est au moins égale à deux fois sa hauteur.