Exercice 1 *Démontrez que le code suivant de division entière est valide*

```
def q(a,b):
        q=0
        while a - q*b >= b:
                q=q+1
        return q
```

Exercice 2 *Mettez sous la forme* $\Theta(n^\alpha \log n)$ *les expressions suivantes*

1. $\frac{\log_b n}{\log_a n}$
2. $a^{\log_b n}$
3. $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i}$
4. $\log(n!)$
5. $\sum_{i=1}^{n} i^c$

où $a, b, c \geq 2$ *sont des entiers constants.*

Exercice 3 *Démontrez en détail votre réponse à la dernière expression de l'exercice précédent.*

Exercice 4 *On considère le code suivant:*

```
A=[0 for i in range(n+1)]
A[1]=1
def ft(i):
        global A,n
        if i==0 or A[i]>0:
                return A[i]
        else:
                A[i]=ft(i-1)+ft(i-2)
                return A[i]
```

1. *Quelle est la valeur retournée par l'appel à* `ft(12)` *?*
2. *Quelle est la complexité de* `ft(n)` *?*
3. *Démontrer votre réponse au 2.*

Exercice 5 *On a effacé des parties du code python suivant:*

```
 def fc(n):
        if n==0:
                return [0,1]
        else:
                      =
                return [v,u+v]
```

1. *Complétez le code de* `fc(n)` *pour que la valeur retournée soit* $\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \bar{\phi}^n)$, *avec* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
2. *Quelle est la complexité de* `fc(n)` *?*
3. *Démontrer votre réponse au 2.*

Exercice 6 *On considère l'algorithme d'Euclide renvoyant pgcd(a, b).*

```
def e(a,b):
        if a*b==0:
                return a+b
        else:
                return e(b,a%b)
```

1. *Quelle est la complexité de* `e(a,b)` *?*
2. *Démontrez votre réponse en 1.*

Exercice 7 *Considérons un algorithme dont la taille des entrées est représentée par un entier n, et dont le temps d'exécution $T(n)$ satisfait:*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & si\ n < b \\ aT(n-b) + \Theta(n^c) & si\ n \geq b \end{cases}$$

pour des entiers $a, b, c \geq 1$.

1. *Démontrez que $T(n) = \Theta\Big(a^q + \sum_{i=0}^{q-1} a^i (n - ib)^c\Big)$ où q est le quotient de la division entière de n par b.*
2. *Démontrez que si $a \geq 2$, l'algorithme est exponentiel.*
3. *Démontrez que $\sum_{i=0}^{q-1} (n - ib)^c = \sum_{i=1}^{q} (r + ib)^c$*
4. *Démontrez que si $a = 1$, alors $T(n) = \Theta(n^{c+1})$.*

Exercice 8 *Le théorème de Bachet-Bezout énonce que pour toute paire d'entiers $a, b \in \mathbb{N}$, il existe deux relatifs $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = pcgd(a, b)$.*

Utilisez le code suivant pour démontrer qu'il existe une infinité de couples u, v.

```
def B(a,b):
        """on suppose a>=b"""
        if b==0:
                return [1,0,a]
        else:
                [x,y,d]=B(b,a%b)
                return [y,x-(a//b)*y,d]
```