Exercice 1 *(5 points)*

1. **[1/2 point]**

```
trift(t1)
trift(t2)
fus(tt1,tt2)
```

2. **[1/2 point]** $T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & si\ n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & si\ n \geq 2 \end{cases}$

3. $T(2^p) = \Theta(2^p(p+1))$ *puisque*

   (a) **[1 point]** *Remarquons que* $2\sum_{i=0}^{p} 2^i 2^{(p-i)} + 2^{p+1} = \sum_{i=0}^{p} 2^{i+1}2^{(p-i)} + 2^{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} 2^i 2^{(p-i+1)} + 2^{p+1} = \sum_{i=0}^{p+1} 2^i 2^{(p-i+1)}$. *Donc, si* $T(2^p) = \Theta(\sum_{i=0}^{p} 2^i 2^{(p-i)})$, *alors* $T(2^{p+1}) = 2T(2^p) + \Theta(2^{p+1}) = \Theta\Big(2\sum_{i=0}^{p} 2^i 2^{(p-i)} + 2^{p+1}\Big) = \Theta(\sum_{i=0}^{p+1} 2^i 2^{(p-i)})$; *d'où* $T(2^p) = \Theta(\sum_{i=0}^{p} 2^i 2^{(p-i)})$.

   (b) **[1 point]***Remarquons que* $\sum_{i=0}^{p} 2^i 2^{(p-i)} = 2^p \sum_{i=0}^{p} 2^{i-p} 2^{(p-i)} = 2^p(p+1)$, *d'où* $T(2^p) = \Theta(2^p(p+1))$.

4. **[2 points]** *Donc* $T(n) = \Theta(n \log n)$, *car il existe* $c, d > 0$ *telles que*

$$\frac{c}{2} n \log_2 n \leq \frac{c}{2}(p+1)2^{p+1} \leq c\,(p+1)2^p \leq T(2^p) \leq T(n) \leq T(2^{p+1}) \leq d\,(p+2)2^{p+1} \leq 4d\,p2^p \leq 4d\,n \log_2 n$$

Exercice 2 *(4 points)*

1. **[1/2 point]**

```
i>=0 and x<A[i]
A[i+1]=A[i]
```

2. **[2 points]** *Il suffit de montrer qu'au début de chaque passage dans la boucle* `for`*, on a que* `A[:j]` *est trié; et que à la fin de la boucle* `for`*, on a que* `A[:j+1]` *est trié. C'est vrai car* `A[:1]` *est trié, et car, lorsque* `A[:j]` *est trié, un passage dans* `for` *transforme* `A[:j+1]` *en un tableau trié en insérant* `A[j]` *à droite du plus grand* `i` *tel que* `A[i] < x=A[j]`.

3. **[1/2 point]** *Aucune.*

4. **[1/2 point]** $\sum_{j=1}^{n-1} j = n(n-1)/2 = \Theta(n^2)$

5. **[1/2 point]** $\Theta(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{2}) = \Theta(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j) = \Theta(n^2)$.

Exercice 3 *(5 points)*

1. **[2 points]** *Il existe des entier* q *et* $r < b$ *tels que* $a = bq + r$. *Il suffit de montrer que* d *est un diviseur de* a, b *si et seulement si* d *est un diviseur de* b, r.

   (a) $\exists x, y$ *entiers tels que* $a = dx$ *et* $b = dy$, *implique* $r = a - bq = d(x - qy)$

   (b) $\exists y, z$ *entiers tels que* $b = dy$ *et* $r = dz$, *implique* $a = d(qy + z)$.

2. **[3 points]** *Il suffit de montrer que le nombre* $n+1$ *des appels récursives satisfait* $n = O(\log b)$. *Posons* $r_0 = a$ *et* $r_1 = b$ *ainsi l'appel à* `e(a,b)` *déclenche les appels récursives :* $e(r_0, r_1), e(r_2, r_1) \ldots, e(r_{n-1}, r_n), e(r_n, 0)$, *et*

$$\begin{array}{rlll} r_0 = q_1 r_1 + r_2 & avec & q_1 > 0, & 0 < r_2 < r_1 < r_0 \\ r_1 = q_2 r_2 + r_3 & avec & q_2 > 0, & 0 < r_3 < r_2 < r_1 < r_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n & avec & q_{n-1} > 0, & 0 < r_n < \ldots < r_1 < r_0 \\ r_{n-1} = q_n r_n + 0 & avec & q_n > 0, & 0 = r_{n+1} < r_n < \ldots < r_1 < r_0 \end{array}$$

Avec $u_i := r_{n-i+1}$, *on a* $u_0 = 0$, $u_1 \geq 1$, *et* $u_i \geq u_{i-1} + u_{i-2}$, *donc* $r_1 = u_n \geq f(n) = \Theta(\phi^n)$, *où* $f(n)$ *est la suite de Fibonnacci.*

Exercice 4 *(6 point)*

1. **[1 point]** *L'algorithme calcul le produit $C = AB$ de deux matrices A, B, carrées de taille n, en calculant récursivement les 4 sous-matrices, carrées de taille $n/2$, de C, en fonction des 8 sous-matrices, carrées de taille $n/2$, de A, B grâce à l'égalité:*

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = C$$

2. **[1/2 point]** $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2) = \Theta(n^3)$.

3. **[3 points]** *Remarquons que*

$$\begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & - \\ \cdot & + & \cdot & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - & \cdot & + & \cdot \\ - & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

donc l'algorithme suivant donne le produit en $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$

```
def Strassen(A,B):
     if n <= 1:
           return C=A*B
     else:
               P1 = Strassen(A11+A22, B11+B22)
               P2 = Strassen(A21+A22, B11)
               P3 = Strassen(A11, B12-B22)
               P4 = Strassen(A22, B21-B11)
               P5 = Strassen(A11+A12, B22)
               P6 = Strassen(A21-A11, B11+B12)
               P7 = Strassen(A12-A22, B21+B22)
               C12= P5+P3
               C21= P2+P4
               C11= P1+P4-P5+P7
               C22= P1+P3-P2+P6
               return C
```

4. **[1.5 points]** $uz = (ax - by) + i(ay + bx)$ *peut s'obtenir avec* $p_1 = ax$, $p_2 = by$ *et* $p_3 = (a + b)(x + y)$, *car* $ay + bx = p_3 - p_1 - p_2$.

Exercice 5 *(4 points)*

1. **[1 point]**

```
[y,x-(a//b)*y,d]
```

2. **[3 points]**

```
def B2(a,b):
       """on suppose a>=b"""
       if b==0:
               return [1,1,a]
       else:
               [x,y,d]=B(b,a%b)
               return [y,x-(a//b)*y,d]
```