EXAMEN : Algorithme et Programmation Université Paris-Dauphine MIDO L2

Exercice 1 .

1. ```
   trift(t1)
   trift(t2)
   fus(tt1,tt2)
   ```

2. $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

3. *Donnez les détails de la résolution de cette équation pour* $n = 2^p$.

4. *Donnez les détails de la résolution de cette équation pour tout* n.

Exercice 2 1. *Complétez ce programme de tri insertion en python.*

```
def trins(A):
        for j in range(1,len(A)):
                x=A[j]
                i=j-1
                while  ?(1)?
                         ?(2)?
                        i -= 1
                A[i+1]=x
```

2. *En notant* `A[:j]` *le sous-tableau* `A[0],A[1],...,A[j-1]`*, montrez que* `trins` *est valide.*

3. *Si* `A` *est trié dans l'ordre croissant combien y a-t-il d'exécution de* `i -= 1` *?*

4. *Si* `A` *est trié dans l'ordre décroissant combien y a-t-il d'exécution de* `i -= 1` *?*

5. *Quelle est la complexité de* `trins` *en moyenne ?*

Exercice 3 1. *Montrer que* `Euclide` *retourne le pgcd de* a, b.

```
def Euclide(a,b):
    """on suppose a>=b"""
    if b==0:
        return a
    else:
        return Euclide(b,a%b)
```

2. *Montrer que la complexité de* `Euclide` *est* $O(\log b)$.

Exercice 4 1. *Le pseudo-code suivant décrit un algorithme récursif pour la multiplication de deux matrices carrées:*

```
def mult(A,B):
     if n <= 1:
           return C=A*B
     else:
          C11=mult(A11,B11)+mult(A12,B21)
          C12=mult(A11,B12)+mult(A12,B22)
          C21=mult(A21,B11)+mult(A22,B21)
          C22=mult(A21,B12)+mult(A22,B22)
          return C
```

Expliquez ce pseudo-code.
```

2. *Quelle est la complexité de* `mult` *?*

3. *Sachant que*

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   et que

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & - & \cdot & + \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} + & \cdot & - & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   donnez le pseudo-code d'un algorithme récursif pour la multiplication de deux matrices carrées A, B de taille n, dont le temps d'éxécution satisfait $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$.

4. *Donez un algorithme qui multiplie deux nombres complexes $u = x + iy$ et $z = a + ib$ en n'effectuant que 3 multiplications.*

Exercice 5 1. *Complétez cette fonction python pour qu'elle retourne un triplet $(x, y, d) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $ax + by = d$, où d est le pgcd de a, b.*

```
def B(a,b):
        """on suppose a>=b"""
        if b==0:
                return [1,0,a]
        else:
                [x,y,d]=B(b,a%b)
                return ?(1)?
```

2. *Répondez à l'aide d'une fonction python à la question suivante : étant donnés le pgcd d de a, b, les couples d'entiers relatifs (x, y) tels que $ax + by = d$ sont-ils uniques ?*