MEDAF et Nouveaux Modèles de Décision dans le Risque

Denis Bouyssou, Jean Le Foll

(version préliminaire))

Résumé

Le Modèle d'Équilibre des Actifs Financiers (MEDAF) constitue un des acquis importants de la théorie financière. Son développement originel fait l'hypothèse d'investisseurs ayant des préférences de type “espérance - variance”. Un tel cadre permet de montrer simplement un “théorème de séparation” impliquant que tous les investisseurs détiennent, à l'équilibre, le même portefeuille d'actifs risqués qu'ils combinent dans des proportions variables avec un actif sans risque. Cette “séparation” est à la base des résultats centraux du MEDAF.
Lorsque les investisseurs sont averses au risque et ont des préférences conformes à la théorie de l'utilité espérée, on connaît les conditions sur le rendement des actifs risqués permettant de garantir une telle “séparation” et, ainsi, de retrouver les principaux résultats du MEDAF. Dans cette note, on montre que ces mêmes conditions ont des conséquences similaires lorsque les investisseurs ont de l'aversion pour le risque et des préférences non nécessairement conformes à la théorie de l'utilité espérée.

Mots-clés : MEDAF, Fonds Mutuels, Théorie de l'utilité espérée, Aversion au risque, Nouveaux modèles de décision dans le risque.

I- Introduction

Le Modèle d'Équilibre des Actifs Financiers (MEDAF) est l'un des résultats centraux de la théorie financière moderne. Sa dérivation originelle (Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966)) fait l'hypothèse d'investisseurs ayant des préférences de type "espérance - variance" : ils ne sont concernés que par l'espérance et la variance ... - ainsi que celle de beaucoup de ses extensions -. On sait (voir, par exemple, Fishburn (1979)) que de telles préférences ne sont pas nécessairement conformes à l'"hypothèse standard" en théorie financière et en économie de l'incertain : celle d'investisseurs ayant des préférences conformes à la théorie de l'utilité espérée et averses au risque. Ceci a amené à des travaux visant à retrouver les principaux résultats du MEDAF dans ce cadre.

On sait que, dans la version classique du MEDAF, tous les investisseurs détiennent à l'équilibre un portefeuille constitué, d'une part, d'actif sans risque et, d'autre part, du portefeuille de marché. Il y a "séparation monétaire à deux fonds mutuels". Parmi les travaux visant à retrouver le MEDAF dans le cadre de l'"hypothèse standard", ceux s'intéressant aux conditions garantissant l'existence d'une telle "séparation" sont donc particulièrement importants. Cette "séparation" peut être obtenue soit en imposant des restrictions sur les fonctions d'utilité des investisseurs (voir Cass et Stiglitz (1970) ou, pour une référence récente, Lewbel et Perraudin (1995)), sur le rendement des actifs risqués (voir Ross (1978), Litzenberger et Ramaswamy (1979) ou Nielsen (1991)) ou sur les deux à la fois (on trouvera une présentation d'ensemble de ces résultats dans Huang et Litzenberger (1988) ou dans Ingersoll (1987)). Ces conditions permettent de retrouver l'essentiel des résultats du MEDAF dans le cadre de l'"hypothèse standard".

L'hypothèse d'investisseurs averses au risque et maximisateurs de l'espérance d'une utilité est centrale en théorie financière et en économie de l'incertain. Son quasi-monopole est sans doute dû à la fois à la légitimité que lui confèrent les développements axiomatiques issus de l'ouvrage de von Neumann et Morgenstern (1947) ainsi qu'à sa fécondité comme hypothèse de travail (voir, par exemple, les synthèses de Merton (1982) et de Hirsheifer et Riley (1992)). Depuis quelques années, on assiste cependant à une remise en compte profonde de la théorie de l'utilité espérée, tant en ce qui concerne ses possibilités de décrire le comportement observé de nombreux individus (voir les articles classiques de Allais (1953) et Kahneman et Tversky (1979) ou la synthèse de Machina (1987)) que son attrait normatif (voir Allais (1953) ou Machina (1982)). De nouveaux modèles de décision dans le risque ont été proposés (Machina (1982), Quiggin (1982), Yaari (1987), Allais (1988)), axiomatisés, testés expérimentalement et confrontés à la théorie de l'utilité espérée. De nombreux travaux ont montré l'intérêt de ces nouveaux modèles en économie de l'incertain (voir Machina (1982, 1989), Roell (1987), Yaari (1987), Dekel (1989), Quiggin (1993, 1995), Neilson (1995)). Ces travaux concernent presqu'exclusivement des problèmes de statique comparative. Or on sait que dans de tels problèmes seuls des cas simples (par exemple comprenant deux ou un nombre très limité de titres) sont susceptibles de traitements analytiques élégants. Même dans ces cas, les résultats obtenus ne sont pas toujours simples à interpréter par exemple du fait de la superposition d'"effets de substitution" et d'"effets revenu".

L'objet de cette note est de tenter de montrer l'intérêt de ces nouveaux modèles pour l'économie de l'incertain et la théorie financière en adoptant un point de vue plus "macro" sur le fonctionnement d'un marché financier (une démarche proche a été adoptée par Kelsey et Milne (1995) concernant l'APT). En prenant le MEDAF comme point d'appui, on montrera que faire l'hypothèse d'investisseurs ayant des préférences non conformes à la théorie de l'utilité espérée, laisse intacts les principaux résultats obtenus dans le cadre de l'"hypothèse standard". Sans nier l'intérêt des travaux visant à établir des résultats de statique comparative à l'aide de ces nouveaux modèles, nous espérons proposer là un argument différent et, à beaucoup d'égards, plus simple montrant leur intérêt pour l'analyse économique.

Cette note de synthèse se veut aussi pédagogique. Elle est organisée comme suit. Nous présentons en section 2 notre cadre général d'analyse. En section 3, on rappellera brièvement les éléments essentiels du MEDAF dans sa version classique, c'est-à-dire en supposant des préférences "espérance-variance". Une extension de ce modèle au cas de l'"hypothèse standard" est présentée en section 4. Nous montrons en section 5 que cette généralisation est robuste à l'abandon de l'"hypothèse standard". Une dernière section discutera des résultats obtenus et présentera des voies de recherche future. On y montrera, en particulier, que nos résultats s'étendent au modèle d'évaluation par arbitrage.

II- Le cadre général d'analyse

Dans cette note, nous nous intéresserons à un modèle (à une période) d'échange pur de titres financiers. Aujourd'hui (en temps $t = 0$), n investisseurs détiennent une dotation initiale consistant en $1 + m$ titres financiers. Chaque titre est caractérisé par une distribution de probabilité sur ce que rapportera ce titre demain (au temps $t = 1$). Cette distribution de probabilité est déterminée par la "sphère réelle" de l'économie et est indépendante du modèle d'échange. Au temps $t = 0$, un marché permet aux n investisseurs d'échanger leurs titres. Le problème consiste alors à s'intéresser aux conditions d'équilibre sur ce marché et/ou à la structure des prix d'équilibre.

Les variables exogènes dans un tel modèle consistent dans les caractéristiques de chacun des titres échangés, les dotations initiales et les préférences de chaque investisseur. On notera :

Z_f la distribution de probabilité (dégénérée) sur la valeur du titre 1 supposé sans risque, en $t = 1$,

$\tilde{Z}_j$ la distribution de probabilité sur la valeur du titre risqué j ($j = 2, 3, \ldots, m + 1$) en $t = 1$,

ϕ^i la dotation initiale de l'investisseur i ($i = 1, 2, \ldots, n$) en titre 1,

W_j^i la dotation initiale de l'investisseur i ($i = 1, 2, \ldots, n$) en titre j ($j = 2, 3, \ldots, m + 1$),

$\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi^i$ le stock total de titres sans risque,

$W_j = \sum_{i=1}^{n} W_j^i$ le stock total de titres risqués j ($j = 2, 3, \ldots, m + 1$).

Les variables endogènes du modèle consistent dans les prix d'équilibre P_f, P_2, …, P_{m+1} de chacun des $1 + m$ titres sur le marché. On posera, de façon non restrictive, $P_f = 1$, le titre sans risque étant choisi comme numéraire.

Une telle présentation suppose que les n investisseurs ont des anticipations identiques sur ce que rapporteront les titres en $t = 1$. On supposera de plus que les distributions $\tilde{Z}_j$ sont telles que les espérances et les variances existent et que la matrice de variance - covariance associée Ω est non singulière.

La richesse $\tilde{R}^i$ d'un investisseur i au temps $t = 1$ dépend du nombre x^i de titres sans risque détenu et du nombre y_j^i de titres risqués j détenus, c'est-à-dire son portefeuille $(x^i, \mathbf{y}^i)$. On a :

$\tilde{R}^i = x^i Z_f + \sum_{j=2}^{m+1} y_j^i \tilde{Z}_j$, ou encore en utilisant des notations matricielles évidentes, $\tilde{R}^i = x^i Z_f + \mathbf{y}^{i\prime} \tilde{\mathbf{Z}}$.

En notant F^i la fonctionnelle de préférence de l'investisseur i sur sa richesse au temps $t = 1$, son problème, étant donné un système de prix $P_f = 1$, $\mathbf{P}' = (P_2, P_3, \ldots, P_{m+1})$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &\underset{(x^i, \mathbf{y}^i)}{\text{Max}}\ F^i(\tilde{R}^i) = f^i(x^i, \mathbf{y}^i) \\ &\text{sous la condition} \\ &(\phi^i - x^i) + \sum_{j=2}^{m+1} P_j (W_j^i - y_j^i) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

On notera qu'un tel modèle n'impose aucune contrainte de positivité sur x^i ou sur y_j^i. Il autorise les ventes à découvert de tous les titres sans restriction. De ce fait, même si l'on suppose que les distributions $\tilde{Z}_j$ ont un support positif et borné [0, M] (ce qui ne sera pas le cas ici), il n'en va pas de même pour $\tilde{R}^i$; il n'y a pas de prise en compte de la "banqueroute" possible d'un investisseur au temps t = 1.

Un système de prix d'équilibre sur le marché des titres sera alors obtenu si la résolution simultanée du problème (1) pour les n investisseurs amène à un équilibre sur le marché des 1 + m titres, c'est-à-dire si $\sum_{i=1}^{n} x^{i*} = \phi$ et $\sum_{i=1}^{n} y_j^{i*} = W_j$ (j = 2, 3, …, m + 1), en notant x^{i*} et y_j^{i*} une solution optimale de (1) pour l'investisseur i. Il est clair qu'en présence de la seconde, la première de ces conditions est superflue. Une présentation du MEDAF dans un tel cadre peut paraître non standard et inutilement compliquée. Elle est cependant indispensable si l'on souhaite étudier les conditions d'équilibre sur le marché des titres. On retrouvera une présentation plus standard en notant que le "rendement" des titres s'obtient en divisant $\tilde{Z}_j$ par P_j.

III- Préférences "espérance - variance"

Dans le cadre du modèle présenté à la section précédente, le modèle classique du MEDAF suppose que chaque investisseur a des préférences "espérance - variance" c'est-à-dire que la fonctionnelle de préférence de l'investisseur i peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &F^i(\tilde{R}^i) = F^i(x^i Z_f + \mathbf{y}^{i\prime}\tilde{\mathbf{Z}}) = f^i(x^i, \mathbf{y}^i) = \\ &V^i(x^i Z_f + \mathbf{y}^{i\prime}\overline{\mathbf{Z}}; \mathbf{y}^{i\prime}\Omega\mathbf{y}^i) \end{aligned} \tag{2}$$

où $\overline{\mathbf{Z}}$ est le vecteur des espérances des m titres risqués. On supposera que V^i est strictement croissante (resp. décroissante) en son premier (resp. second) argument, continûment différentiable et quasi-concave (pour des conditions simples impliquant des préférences de type "espérance-variance", voir Löffler (1996)) ; sous de telles conditions la fonction f^i est quasi-concave et continûment différentiable.

Compte tenu de (2), le problème (1) peut s'écrire, après élimination de x^i du fait de la contrainte et en utilisant des notations matricielles évidentes :

$$\underset{\mathbf{y}^i}{\text{Max}}\ V^i(Z_f(\phi_i + \mathbf{P}'\mathbf{W}^i - \mathbf{P}'\mathbf{y}^i) + \mathbf{y}^{i\prime}\overline{\mathbf{Z}}; \mathbf{y}^{i\prime}\Omega\mathbf{y}^i) \tag{3}$$

En notant $\mathbf{y}^{i*}$ une solution optimale de (3) pour l'investisseur i, la condition du premier ordre conduit à :

$$\mathbf{y}^{i*} = \lambda^i \Omega^{-1}(\overline{\mathbf{Z}} - Z_f \mathbf{P}) \tag{4}$$

où le paramètre λ^i peut s'interpréter comme un taux de substitution entre espérance et variance. Il est strictement positif compte tenu des hypothèses faites sur V^i. L’équation (4) est, dans ces conditions un théorème de séparation monétaire à deux fonds mutuels, puisque, si une situation d’équilibre existe, chaque investisseur détiendra le même portefeuille de titres risqués qu’il combinera selon ses préférences avec le titre sans risque.

L’ensemble des 1 + m marchés sera alors en équilibre si $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}^{i*} = \mathbf{W}$, ce qui, compte tenu de (4) implique que :

$$\overline{\mathbf{Z}} - Z_f \mathbf{P} = \gamma \Omega \mathbf{W}. \tag{5}$$

En prémultipliant chacun des termes de cette équation par $\mathbf{W}'$, on obtient :

$$\gamma = \frac{\mathbf{W}'\overline{\mathbf{Z}} - Z_f \mathbf{W}'\mathbf{P}}{\mathbf{W}'\Omega\mathbf{W}} \tag{6}$$

où $\mathbf{W}'\overline{\mathbf{Z}}$ est l’espérance du stock de titres risqués (le “portefeuille de marché”), $\mathbf{W}'\Omega\mathbf{W}$ est la variance du stock de titres risqués et $\mathbf{W}'\mathbf{P}$ est la valeur de marché du stock de titres risqués. En combinant (5) et (6) on obtient alors :

$$\overline{\mathbf{Z}} - Z_f \mathbf{P} = \frac{\Omega\mathbf{W}}{\mathbf{W}'\Omega\mathbf{W}}(\mathbf{W}'\overline{\mathbf{Z}} - Z_f \mathbf{W}'\mathbf{P}) \tag{7}$$

ce qui est l’expression de la “droite de marché” dans notre cadre. En posant $\tilde{r}_j = \tilde{Z}_j / P_j$ et $\tilde{r}_M = \mathbf{W}'\tilde{\mathbf{Z}} / \mathbf{W}'\mathbf{P}$, on obtient l’expression classique du MEDAF en termes de rendements et on a pour chacun des m titres risqués :

$$\bar{r}_j - r_f = (\bar{r}_M - r_f)\frac{\mathrm{Cov}(\tilde{r}_j; \tilde{r}_M)}{\mathrm{Var}(\tilde{r}_M)},$$

le rendement espéré excédentaire du titre risqué j étant lié linéairement au rendement excédentaire du “portefeuille de marché” au travers de son “bêta”.

Notons que (7) est une condition portant sur les prix d’équilibre, *s’il existe un équilibre*. La question de l’existence d’un équilibre dans ce modèle n’est pas triviale. En effet, il n’est pas possible de recourir ici aux conditions standard d’existence “à la Debreu” puisque les “ensembles de consommation” ne sont pas bornés inférieurement du fait des hypothèses faites concernant les ventes à découvert. En présence d’un titre sans risque (dans le cas contraire s’ajoutent au problème des ensembles de consommation non bornés inférieurement des problèmes de “points de satiété”) et lorsque les anticipations des investisseurs sont identiques, ce qui est le cas dans notre modèle, l'existence d'un équilibre est cependant assurée (voir, par exemple, Nielsen (1990, proposition 2)). Son unicité et la positivité des prix d'équilibre soulèvent néanmoins des problèmes délicats (voir Nielsen (1988) et (1992a) ou Konno et Shirikawa (1995)).

Notons enfin que l'obtention du MEDAF repose sur l'équation (4), c'est-à-dire le théorème de séparation, et sur l'équilibre des marchés. C'est dire que l'obtention d'un théorème de séparation identique à (4), dans un cadre différent que celui de préférences "espérance - variance", conduira également au MEDAF. C'est cette voie qui est explorée dans les deux sections suivantes.

IV- Préférences "neumanniennes"

On se place, dans cette section, dans le cadre de l'"hypothèse standard" : les investisseurs sont tous supposés maximiser l'espérance de l'utilité de leur richesse au temps t = 1, les fonctions d'utilité étant supposées strictement croissantes et strictement concaves.

On a donc pour l'investisseur i :

$$F^i(\tilde{R}^i) = F^i(x^i Z_f + \mathbf{y}^{i\prime}\tilde{\mathbf{Z}}) = E(u^i(x^i Z_f + \mathbf{y}^{i\prime}\tilde{\mathbf{Z}})) \qquad (9)$$

Les conditions permettant de ramener l'"hypothèse standard" à un cadre "espérance-variance" sont classiques. Il faut supposer que u^i est quadratique (voir Fishburn (1979)) ou que les distributions $\tilde{Z}_j$ sont elliptiques (voir Chamberlain (1983) ou Owen et Rabinovitch (1983)). Si l'on impose de telles conditions, on se retrouve alors dans le cadre de la section précédente. Notons néanmoins que si ces conditions sont suffisantes pour obtenir un théorème de séparation de type (4) et, ainsi, les résultats du MEDAF, elles ne sont pas nécessaires. Pour retrouver un théorème de séparation, il suffit d'imposer des conditions pour que le portefeuille optimal de tout investisseur puisse s'obtenir comme une combinaison du titre sans risque et d'un même portefeuille d'actif risqué. Comme nous l'avons évoqué en introduction, ces conditions peuvent porter sur les fonctions d'utilité des investisseurs, sur les distributions $\tilde{Z}_j$ ou sur les deux à la fois.

Notre propos étant ici d'étendre ces résultats au cas de préférences "non neumanniennes", nous ne nous intéresserons qu'aux conditions sur les $\tilde{Z}_j$. Nous nous appuierons ici sur la présentation de Nielsen (1991) qui généralise et clarifie celle de Ross (1978) en considérant les prix comme endogènes.

Le problème posé revient à chercher des conditions sur $\tilde{\mathbf{Z}}$ pour que, étant donné un investisseur muni d'une fonction d'utilité croissante et concave et d'une dotation de titre initiale

$\left(\phi^{i},\mathbf{W}^{i}\right)$, il existe un portefeuille d'actifs risqué $\boldsymbol{\omega}'=(\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_{m+1})$ tel que pour tout portefeuille d'actifs $(x,\mathbf{y})$ réalisable compte tenu d'un vecteur de prix **P**, il existe toujours une combinaison linéaire de $\boldsymbol{\omega}$ et du titre sans risque qui soit préférable à $(x,\mathbf{y})$. Notons que si $\boldsymbol{\omega}'\overline{\mathbf{Z}} \le (\mathbf{P}'\boldsymbol{\omega})Z_f$, c'est-à-dire si le rendement espéré de $\boldsymbol{\omega}$ est inférieur ou égal au rendement certain consistant à placer tout son avoir dans le titre sans risque, tous les investisseurs neumanniens averses au risque souhaiteront vendre le portefeuille $\boldsymbol{\omega}$ à découvert ; il n'y aura pas d'équilibre possible. De même si $P(\boldsymbol{\omega}'\tilde{\mathbf{Z}} \ge (\mathbf{P}'\boldsymbol{\omega})Z_f) = 1$ tous les investisseurs vendront le titre sans risque à découvert ; dans ce cas également, il n'y aura donc pas d'équilibre possible. En dehors de ces deux situations “pathologiques”, supposons que l'on puisse écrire la distribution de probabilité de chacun des m titres risqués de telle sorte que :

$$\tilde{Z}_j = Z_f P_j + b_j(\boldsymbol{\omega}'\tilde{\mathbf{Z}} - Z_f\mathbf{P}'\boldsymbol{\omega}) + \tilde{\varepsilon}_j \tag{10}$$

avec $E(\tilde{\varepsilon}_j \mid \boldsymbol{\omega}'\tilde{\mathbf{Z}}) = 0$,

Les distributions $\tilde{Z}_j$ suivent un modèle à un facteur représenté par le portefeuille $\boldsymbol{\omega}$, la sensibilité à ce facteur étant donné par le coefficient b_j, le résidu ε_j étant un "bruit blanc" par rapport à ce facteur dû à l'action de facteurs spécifiques au titre j (sur l'interprétation détaillée de cette condition et sur l'existence d'un système de prix permettant de la satisfaire, nous renvoyons à Nielsen (1991)). Considérons alors un investisseur i ayant une fonction d'utilité u^i strictement croissante et strictement concave et une dotation initiale de titres $\left(\phi^{i},\mathbf{W}^{i}\right)$. Son "budget" (c'est-à-dire sa richesse présente) est donc de $B^i = \phi^i + \mathbf{P}'\mathbf{W}^i$. Considérons alors un portefeuille réalisable quelconque $(B^i - \mathbf{P}'\mathbf{y}, \mathbf{y})$. La richesse de l'investisseur au temps t = 1 correspondant à un tel portefeuille est alors de :

$$\tilde{R}^i = (B^i - \mathbf{P}'\mathbf{y})Z_f + \mathbf{y}'\tilde{\mathbf{Z}}\,. \tag{11}$$

Considérons à présent le portefeuille $(B^i - (\mathbf{b}'\mathbf{y})(\mathbf{P}'\boldsymbol{\omega}), (\mathbf{b}'\mathbf{y})\boldsymbol{\omega})$ correspondant à une richesse au temps t = 1:

$$\tilde{R}^{i*} = (B^i - (\mathbf{b}'\mathbf{y})(\mathbf{P}'\boldsymbol{\omega}))Z_f + (\mathbf{b}'\mathbf{y})(\boldsymbol{\omega}'\tilde{\mathbf{Z}})\,. \tag{12}$$

Compte tenu de (10), on a alors, après quelques manipulations :

$$\tilde{R}^i = \tilde{R}^{i*} + \mathbf{y}'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

avec $E(\mathbf{y}'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mid \boldsymbol{\omega}'\tilde{\mathbf{Z}}) = 0$,

ce qui montre que $\tilde{R}^i$ s'obtient à partir de $\tilde{R}^{i*}$ par addition d'un "bruit blanc". Tout investisseur neumannien averse au risque préférera donc $\tilde{R}^{i*}$ à $\tilde{R}^i$ en vertu des résultats de Rothschild et Stiglitz (1970). Sous l'hypothèse (10), il y a donc bien séparation monétaire à deux fonds mutuels, une combinaison linéaire du titre sans risque et du fonds mutuel $\boldsymbol{\omega}$ étant préféré à tout portefeuille réalisable par tout investisseur ayant des préférences conformes à l'"hypothèse standard". Une démonstration technique, que l'on pourra trouver dans Nielsen (1991), montre que cette condition suffisante de séparation est également nécessaire. Notons que (10) implique que :

$b_j = \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{Z}_j, \boldsymbol{\omega}'\tilde{\mathbf{Z}})}{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\omega}'\tilde{\mathbf{Z}})}$ et donc, en particulier que :

$$\overline{Z}_j - Z_f P_j = \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{Z}_j, \boldsymbol{\omega}'\tilde{\mathbf{Z}})}{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\omega}'\tilde{\mathbf{Z}})}(\boldsymbol{\omega}'\overline{\mathbf{Z}} - (\mathbf{P}'\boldsymbol{\omega})Z_f)\,. \tag{13}$$

Sous la condition nécessaire et suffisante de séparation (10), l'équilibre des m + 1 marchés sera atteint si $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}^{i*} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \boldsymbol{\omega} = \mathbf{W}$. La relation (13) devient alors :

$$\overline{\mathbf{Z}} - Z_f \mathbf{P} = \frac{\Omega \mathbf{W}}{\mathbf{W}'\Omega\mathbf{W}}(\mathbf{W}'\overline{\mathbf{Z}} - Z_f \mathbf{W}'\mathbf{P}) \tag{14}$$

ce qui identique à l'équation du MEDAF (7). Celle-ci est obtenue en combinant le théorème de séparation et l'équilibre sur les marchés.

Remarquons que si la condition (10) est vérifiée pour tout B les actifs risqués, à tout portefeuille réalisable pour l'investisseur i correspond un portefeuille obtenu par combinaison du titre sans risque et du portefeuille $\boldsymbol{\omega}$ qui a même espérance que ce portefeuille mais une variance moindre. Les portefeuilles potentiellement optimaux des investisseurs neumanniens sont alors confondus avec les portefeuilles efficients du monde "espérance-variance".

De même qu'à la section 3, l'équation (14) est une condition sur les prix d'équilibre mais ne dit rien sur le problème de l'existence de cet équilibre. Notons, ici, encore que la possibilité de ventes à découvert sans restriction interdit de faire appel aux théorèmes standard garantissant l'existence d'un équilibre. En plus des conditions classiques, il faut également s'assurer, dans notre cadre, qu'il n'existe pas de possibilités d'échange infini ("unbounded trade") qui serait mutuellement profitable à des investisseurs n'ayant pas de portefeuille optimal fini (sur les conditions garantissant l'existence de tels portefeuilles, voir Bertsekas (1974)). Ceci est bien le cas ici, compte tenu de l'hypothèse faite sur les anticipations des investisseurs (voir, par exemple, Nielsen (1992b, proposition 12) qui offre, de plus, une vaste synthèse des contributions antérieures).

V- Préférences "non neumanniennes"

Dans cette section, nous supposons que la fonctionnelle de préférence de l'investisseur i, pour sa richesse future, est quelconque à ceci près :

- qu'elle est compatible avec la dominance stochastique de premier ordre et

- qu'elle est compatible avec la dominance stochastique de deuxième ordre

(sur ces notions voir Fishburn et Vickson (1978 ou Levy 1992)). Cette classe de fonctionnelles, notée NEURA (non Expected Utility with Risk Aversion), est clairement non vide puisqu'elle contient celles conformes à l'"hypothèse standard" (classe de fonctionnelles que nous noterons EURA (Expected Utility with Risk Aversion)). Il est clair d'autre part que la classe NEURA est plus vaste que EURA : elle contient notamment les fonctionnelles de Machina (1982), Quiggin (1982) et Yoan (1987)).

La condition nécessaire et suffisante de séparation monétaire à deux fonds mutuel dans NEURA est aisée à établir. Puisque (10) est une condition nécessaire de séparation dans EURA, elle est *a fortiori* nécessaire dans NEURA puisque EURA $\wp$ NEURA. De plus on a vu à la section précédente que la démonstration de la suffisance de (10) dans EURA repose exclusivement sur l'aversion à l'ajout de "bruit blanc" des investisseurs ayant leur préférence dans EURA. Par construction, l'aversion aux "bruits blancs" est également à l'oeuvre dans NEURA : le respect de la dominance stochastique du deuxième ordre lui est équivalente en vertu des résultats de Rotschild et Stiglitz (1970). On en conclut alors simplement que (10) est une condition nécessaire et suffisante de séparation monétaire dans NEURA. (Notons que ce résultat se déduit également simplement des travaux de Safra et Zilcha (1988) et de Zilcha et Chew (1990) montrant que le passage de EURA à NEURA laisse inchangé l'ensemble des distributions de probabilités efficaces - c'est-à-dire préféré à tout autre pour au moins une relation de préférence - dans tout ensemble de distributions de probabilités). De même qu'à la section précédente, l'équation de la droite de marché du MEDAF (14) se déduit alors directement de la séparation et des conditions d'équilibre sur les marchés. Sous la condition (10), passer de EURA à la classe beaucoup plus vaste NEURA ne change donc rien quant à l'obtention du MEDAF : l'ensemble des portefeuilles efficients se confond avec celui du monde moyenne-variance et est obtenu en combinant l'actif sans risque et le portefeuille du marché. De même la rémunération de tout actif risqué est déterminée selon l'équation (7) de la droite des actifs du marché en fonction de son risque systématique. Le MEDAF est donc obtenu lorsqu'on passe de EURA à la classe beaucoup plus large des fonctionnelles NEURA sous la condition (10).

La classe des NEURA étant très vaste, il n'est pas possible de lui transposer directement les conditions d'existence d'un équilibre établi dans EURA. Pour illustrer cette affirmation, on peut noter que la classe des NEURA contient des fonctionnelles de préférence correspondant à des comportements "plongeurs" par opposition à la diversification que l'on rencontre chez les "neumanniens" ayant de l'aversion pour le risque. Ce type de comportement s'observe, en particulier, pour des préférences obéissant au "modèle dual" de Yaari lorsque le choix du portefeuille d'un investisseur se réduit au choix d'un actif risqué et d'un actif sans risque, ce qui est le cas lorsque les distributions des prix futurs des actifs risqués induisent la séparation monétaire à deux fonds mutuels. Dans une telle situation, les investisseurs de Yaari placent leur richesse dans l'actif risqué ou dans l'actif sans risque uniquement selon la valeur (rentabilité) espérée de l'actif risqué (ce comportement plongeur semble néanmoins limité au cas de deux actifs dont un est dénué de risque : voir Hadar et Seo (1995) ou Eckhoudt dans ce numéro). On conçoit aisément que la présente de "plongeurs" liée à l'absence de limitation à l'endettement conduise à de réelles difficultés dès lors que l'on veut obtenir un équilibre.

Comme précédemment, (14) est une condition sur les prix d'équilibre des titres qui n'implique rien quant à l'existence même d'un équilibre.

Compte tenu de l'ampleur, de la difficulté du problème et de l'objectif poursuivi dans cette note, nous ne chercherons pas ici à donner des résultats généraux d'existence d'un équilibre dans des sous-classes de NEURA nous contentant de renvoyer aux résultats généraux concernant l'existence d'équilibre lorsque les "ensembles de consommation" ne sont pas bornés inférieurement (voir Werner (1987) ou Nielsen (1989)). Mentionnons ici cependant que l'adaptation de ces conditions générales semble particulièrement prometteuse pour ce qui concerne le sous-ensemble de NEURA correspondant au modèle "Expected Utility with Rank dependent Probability" (EURDP) proposé par Quggin (1982) et Allais (1988). Bien qu'étant un cas très particulier de préférences "non neumanniennes", ce modèle d'expression simple et suffisamment général pour offrir une alternative crédible et féconde au modèle neumannien (pour un aperçu de la littérature abondante concernant ce modèle nous renvoyons à Quiggin (1993)).

Afin de donner une idée simple du modèle EURDP, considérons une distribution de probabilités à support fini donnant le résultat x_i avec une probabilité p_i ($i = 1, 2, \ldots, l$). Un investisseur neumannien ayant une fonction d'utilité u évaluera une telle distribution suivant son espérance mathématique d'utilité $\sum_{i=1}^{\ell} p_i u(x_i)$. En supposant sans perte de généralité que $x_1 < x_2 < \ldots < x_l$, un investisseur obéissant au modèle EURDP évaluera une telle distribution selon une "espérance mathématique modifiée" du type :

$$u(x_1) + \sum_{i=2}^{\ell} \varphi\left(\sum_{j=i}^{\ell} p_j\right)\left(u(x_i) - u(x_{i-1})\right)$$

où φ est une est une bijection croissante sur [0 ; 1] (pour une justification de ce modèle on se reportera à Quiggin (1993)). Il est clair que les préférences neumanniennes correspondent au cas particulier où la fonction φ est la fonction identité, le modèle dual de Yaari (1987) correspondant au cas particulier où l'utilité est linéaire. On peut montrer que ce modèle est :

- compatible avec la dominance stochastique de premier ordre si et seulement si u est strictement croissante,

- compatible avec la dominance stochastique de deuxième ordre si u est concave et φ est convexe, l'une des deux fonctions au moins l'étant strictement (voir Chew *et al* (1987) ou Quiggin (1993)).

Pour exclure le cas du modèle dual de Yaari (1987) considérons la classe de préférence EURDPRA correspondant au modèle EURDP avec u strictement croissante et strictement concave et φ strictement convexe. Dans un tel modèle, le problème du choix entre un titre sans risque et un titre risqué s'opère de manière tout à fait semblable au cas neumannien à ceci près que la distribution de probabilités correspondant au titre risqué est "déformée de manière pessimiste" via une fonction de transformation φ convexe. Dans ce cadre particulier à deux titres, les conditions garantissant l'impossibilité d'"échanges infinis" (et donc l'existence d'un équilibre) se transposent immédiatement à la classe EURDPRA. La généralisation de cette observation au cas de plus de deux actifs n'est pas immédiate. Cependant cette observation jointe au fait que de nombreux résultats classiques concernant la diversification dans EURA ne dépendent que du respect de la dominance stochastique de deuxième ordre (voir par exemple Hadar et Seo (1995)) laisse espérer que les conditions garantissant l'existence d'un équilibre dans EURDPRA ne seront que peu différentes de celles faisant de même dans EURA.

V- Discussion

L'objectif de cette note a été de montrer que, du point de vue des conditions d'équilibre d'un marché financier, il y avait peu à perdre de passer de l'"hypothèse standard" (investisseurs neumanniens averses au risque) à celle, beaucoup plus large, d'investisseurs non-neumanniens averses au risque au sens du respect de la dominance stochastique de 2è ordre. Nous espérons avoir ainsi donné, en complément des analyses axiomatiques et empiriques, une preuve de l'intérêt de ces modèles pour l'analyse économique qui ne se limite pas à des résultats de statique comparative.

Beaucoup reste à faire cependant pour généraliser d'autres acquis de l'économie de l'incertain et de la théorie financière en abandonnant l'"hypothèse standard" sur les préférences des investisseurs. Nous nous contenterons ici de mentionner quelques extensions possibles de ce travail ; souligner ses limites nous donnera l'occasion de présenter quelques voies de recherches futures.

L'analyse des conditions de séparation à deux fonds mutuels et l'équilibre des marchés financiers, dans le cadre du paradigme ("standard" d'investisseurs neumanniens ayant de l'aversion pour le risque, se généralise sans difficulté au cas de deux fonds mutuels risqués (voir les conditions de séparation dans Ross (1978) et Nielsen (1991)). On obtient alors le MEDAF de Black (1972). Lorsque les distributions des rentabilités des actifs risqués sont générées selon un modèle linéaire multifactoriel auquel on ajoute un bruit blanc par rappport à l'ensemble de ces facteurs, on obtient encore la relation linéaire du modèle d'évaluation "par arbitrage", entre la rentabilité espérée de tout actif risqué i et les sensibilités des rentabilités de l'actif i aux différents facteurs, pourvu que les investisseurs non-neumanniens aient de l'aversion pour le bruit blanc (voir par exemple Kelsey et Milne (1995)). La séparation à k fonds mutuels n'est pas une condition nécessaire pour obtenir une relation linéaire d'équilibre "exacte" : il suffit alors d'imposer une contrainte sur les distributions des bruits des différents actifs risqués, en nombre limité, permettant la diversification (par exemple la distribution des rentabilités du portefeuille de marché ne dépend pas du bruit des actifs i qui le compose ; voir Connor (1984) et 1987)). Le MEA d'équilibre est compatible avec l'ensemble des portefeuilles moyenne-variance efficients (Chamberlain (1983), Grinblatt et Titman (1983), Huberman et al. (1987), Jobson et Korkie (1985). On sait d'ailleurs que le modèle de marché, dont le facteur risqué unique est le portefeuille de marché, suppose que ce dernier ne dépend pas du bruit des actifs qui le composent (Fama (1973), et qu'alors on obtient le MEDAF lorsque les investisseurs sont neumanniens (Stapleton et Subramanyam (1983), Kwon (1985)). Tous ces résultats sont généralisables au cas d'investisseurs non-neumanniens ayant de l'aversion pour les bruits blancs.

Notons que l'analyse présentée ici, si elle permet de généraliser de nombreux résultats, se heurte néanmoins à des limites sérieuses. Dans le cas "neumannien", la définition de l'aversion au risque ne soulève guère de difficultés ; toutes les définitions classiques (aversion aux "étalements préservant la moyenne", aversion au "bruit blanc", préférence pour l'espérance d'une distribution par rapport à cette distribution, comportement "diversificateur" dans un problème avec un titre sans risque et un titre risqué) se trouvent en effet être équivalentes. Il est important de souligner ici qu'il n'en va plus de même dans un cadre "non-neumannien" (voir Machina (1982), Safra et Zilcha (1988) ou Chateauneuf et Cohen (1994)) où diverses interprétations de l'aversion pour le risque conduisent à des définitions qui ne sont plus équivalentes. Nous avons retenu ici celle en terme de dominance stochastique de deuxième ordre (ou de façon équivalente, en terme d'aversion aux "bruits blancs" ou aux "étalements préservant la moyenne" - voir Rotschild et Stiglitz (1970)) permettant d'obtenir les résultats les plus immédiats. Il serait intéressant de montrer quelles sont les conditions de séparation en utilisant d'autres définitions, plus générales, de l'aversion pour le risque consistant, par exemple, à remplacer l'aversion aux "bruits blancs" par l'aversion aux "bruits blancs co-monotones" (sur cette notion voir, par exemple, Quiggin (1993)). Notons également que de nombreux progrès restent à faire quant à l'obtention de conditions simples, garantissant l'existence d'un équilibre dans un modèle, comme celui considéré ici, où les ensembles de consommation ne sont pas bornés inférieurement et son adaptation à diverses sous classes de préférences "non neumanniennes". Un abandon progressif de l'"hypothèse standard" concernant les préférences des investisseurs devrait permettre de stimuler la recherche dans ce domaine.

Notons, enfin, que la simplicité des résultats présentée ici tient pour beaucoup au fait que, la condition nécessaire et suffisante de séparation dans le cas neumannien est très restrictive (sur le côté restrictif et l'interprétation détaillée de cette condition, voir Nielsen (1991) - il n'est pas exclu cependant que l'introduction de préférences "non-neumanniennes" puisse permettre une démonstration plus simple du caractère nécessaire de cette condition). La recherche de modèles d'équilibre utilisant des conditions moins restrictives constitue un champ de recherches très ouvert.

Références

Allais M. (1953), Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, critique des postulats et axiomes de l'école américaine, *Econometrica*, Vol. 21, pp. 503-46.

Allais M. (1988), The general theory of random choices in relation to the invariant cardinal utility function and the specific probability function, in B. Munier B. (Ed.), *Risk, Decision and rationality*, Theory and Decision Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 233-289.

Bertsekas D.P. (1974), Necessary and sufficient conditions for existence of an optimal portofolio, *Journal of Economic Theory*, Vol. 8, 235-247

Black F. (1972), Capital market equilibrium with restricted borrowing, J*ournal of business*, Vol 45, 444-455.

Cass D. et J.E. Stiglitz (1970), The structure of investor preferences and asset returns, and separability in portofolio analysis: A contribution to the pure theory of mutual funds, *Journal of Economic Theory*, Vol. 2, 122-160

Chateauneuf A. et M. Cohen (1994), Risk-seeking with diminishing marginal utility in a non-exped utility model, *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 9, 77-92.

Chamberlain G. (1983), A characterization of distributions that imply mean-variance utility functions, *Journal of Econmic Theory*, Vol. 29, 185-201.

Chew S.H., E. Karni et Z. Safra (1987), Risk aversion in the theory of expected utility with rank dependent probabilities, *Journal of Economic Theory*, Vol. 42, pp. 370-381.

Connor G. (1984), A unified beta pricing theory, *Journal of Economic Theory*, Vol. 34, 13-31

Dekel E. (1989), Asset demands without the independence axiom, *Econometrica*, Vol 57, 163-169.

Fishburn P.C. et R. G. Vickson (1978),Theoretical Foundations of Stochastic Dominance, in *Stochastic Dominance: An Approach to Decision-Making Under Risk*, G. A. Whitmore and M. C. Findlay (editors), D. C. Heath and Co., Lexington, Massachusetts, pp. 37-113.

Fishburn P.C. (1979), On the Foundations of Mean-Variance Analysis, *Theory and Decision*, Vol. 10, pp. 99-111.

Hadar J. et T.K. Seo (1995), Asset diversification in Yaari's dual theory, *European Economic Review*, Vol 39, 1171-1180.

Hirshleifer, J. et J. G. Riley (1992), *The analytics of uncertainty and information,* Cambridge ; New York : Cambridge University Press.

Huang. C. et Litzenberger (1988), *Foundations of Finacial Economics*, New York, North Holland.

Ingersoll, J. E. (1987), *Theory of financial decision making*, Totowa, N.J. : Rowman & Littlefield.

Kahneman D. et A. Tversky (1979), Prospect theory: an analysis of decision under risk, *Econometrica*, Vol. 47, pp. 263-291.

Kelsey D. et F. Milne (1995), The arbitrage pricing theory with non-expected utility preferences, *Journal of Economic Theory,* Vol. 65, 557-574.

Konno H. at H. Shirakawa (1995), Existence of a nonnegative equilibrium price vector in the mean-variance capital market, *Mathematical Finance*, Vol. 5, 233-246.

Kwoon Y.K. (1985), Derivation of the capital asset pricing model without normality or quadratic preference: a note, *Journal of Finance*, Vol. 40, 1505-1509.

Levy H. (1992), Stochastic dominace and expected utility: survey and analysis, *Management Science*, Vol. 38, 555-593.

Lewbel A. et W. Perraudin (1995), A theorem on portofolio separation with general preferences, *Journal of Economic Theory,* Vol. 65, 624-626.

Lintner J. (1965), The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock potofolio and capital budgets, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, 13-37.

Litzenberger R.H. et K. Ramaswamy, (1979), Distributional restrictions for two-fund separation, *TIMS studies in Management Sciences*, Vol. 11, 99-107.

Löffler A. (1996), Variance aversion implies m-s2 - criterion, *Journal of Economic Theory*, Vol. 69, 532-539.

Machina M.J. (1982), Expected ultility without the independence axiom, *Econometrica*, Vol. 50, pp. 277-323.

Machina M.J. (1987), Choice under uncerainty: Problems solved and unsolved, *Journal of Economic Perspectives*, Vol 1, 121-154.

Machina M.J. (1989), Comparative statics and non-expected utility preferences, *Journal of Economic Theory*, Vol 47, 393-405.

Merton R.C. (1982), On the microeconomic theory of investment under uncertanty, in *Handbook of Mathematical Economics Vol. II*, K.J. Arrow et M.D. Intriligator (Eds), North Holland 601-669.

Mossin J. (1966), Equilibrium in a capital asset market, *Econometrica*, Vol 34, 768-783.

von Neumann J. et O. Morgenstern (1947), *Theory of games and economic behaviour*, 2nd edition, Princeton University Press, Princeton.

Neilson W.S. (1995), Comparative statics derivatives with nonlinear preferences, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 24, 45-57.

Nielsen L.T. (1988), Uniqueness of Equilibrium in the classical capital asset pricing model, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 23, 329-336.

Nielsen L.T. (1989), Asset market equilibrium with short-selling, *Review of Economic Studies*, Vol. 56, 467-474.

Nielsen L.T. (1990), Existence of equilibrium in CAPM, *Journal of Economic Theory*, Vol. 52, 223-231.

Nielsen L.T. (1991), Two-fund seperation, factor structure and robustness, WP 91/104, INSEAD, Fontainebleau, France.

Nielsen L.T. (1992a), Positive prices in CAPM, *Journal of Finance*, Vol 47, 791-808.

Nielsen (1992b), Portofolio choice and equilibrium with expected-utility preferences", WP 92/59, INSEAD, Fontainebleau, France.

Roell A. (1987), Risk-aversion in Quiggin and Yaari's rank-order model of choice under uncertainty, *Economic Journal*, Vol. 97, 143-159.

Ross S.A. (1978), Mutual fund separation in financial theory - The separating distributions, *Journal of Economic Theory*, Vol 17, 254-286.

Rothschild M. et J.E. Stiglitz (1970), Increasing risk I, a definition, *Journal of Economic Theory*, Vol. 2, 225-243.

Owen J. et R. Rabinovitch (1983), On the class of elliptical distributions and their applications to the theory of portofolio choice, *Journal of Finance*, Vol. 38, 745-752.

Quiggin J. (1982), A theory of anticipated utility, *Journal of Economic Behaviour and Organization*, Vol. 3, pp. 323-343.

Quiggin J. (1993), *Generalized Expected Utility Theory: The Rank Dependent Model*, Boston, Kluwer.

Quiggin J. (1995), Economic choice in generalized utility theory, *Theory and decision*, Vol 38, 153-171.

Safra Z et I. Zilcha (1988), Efficient sets with and without the expected utility hypothesis, *Journal of Mathemathical Economics*, Vol. 17, 369-384.

Sharpe W. (1964), Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, Vol. 19, 425-442.

Stapelton R.C. et M.G. Subrahmanyam (1983), The market model and capital asset pricing theory: a note, *Journal of Finance*, Vol. 38, 1637-1642

Yaari M.E. (1987), The dual theory of choice under risk, *Econometrica*, Vol. 55, pp. 95-115.

Wei K.C.J. (1988), An asset-pricing theory unifying the CAPM and the APT, *Journal of Finance*, Vol. 43, 881-892.

Werner J. (1987), Arbitrage and the existence of competitive equilibrium, *Econometrica*, Vol. 55, 1404-1418.

Zilcha I. et S.H. Chew (1990), Invariance of the efficient set when the expected utility hypothesis is relaxed, *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol 13, 125-131.