Gestion de stock.

Etats : si on peut stocker au plus M unités, on aura M+1 états, chaque état représentant le nombre d'unités en stock.

Actions : les actions représentent le nombre d'unités commandées.
On ne peut pas commander plus d'unités qu'on ne peut en stocker, donc pour un stock de i et k unités commandées, on doit avoir
$$i + k \leq M.$$
Donc pour un état i, les actions possibles sont $0 \leq k \leq M-i$

Transitions

T_{ij}^{k} est la probabilité que le stock soit de j unités sachant qu'on a commandé k unités lorsque le stock était de i unités.

$$T_{ij}^{k} = \begin{cases} P(i+k-j) & \text{si } j \leq i+k \text{ (on a un stock suffisant pour honorer les commandes)} \\ P(i+k) & \text{sinon (on a strictement plus de commandes que de stock, et on ne vend rien)} \end{cases}$$

N.B. On interprète "les clients vont ailleurs et la commande perdue" par aucune vente n'est effectuée. On pourrait aussi interpréter comme on honore $i+k$ commandes, et on perd les commandes en surplus.

Récompenses.

On va d'abord décrire R_{ij}^{k} qui est la récompense obtenue si on arrive au stock j sachant qu'on avait commandé k unités quand le stock était de i unités.
Pour avoir R_{i}^{k}, il faudra calculer la récompense espérée sur l'ensemble des ventes possibles ~~[illegible]~~.

R_{ij}^k implique qu'on a vendu $n = i+k-j$ unités

- Si $k=0$: on ne commande rien (aucun coût de commande)

donc $R_{ij}^0 = f(j-i) - h(j)$: on a vendu $j-i$ unités et il reste à stocker j unités.

- Si $k > 0$ on commande au moins une unité.

R_{ij}^k
- si $0 \leq j \leq i+k$: on a honoré $i+k-j \geq 0$ commandes

  le bénéfice est $\underbrace{f(i+k-j)}_{\text{bénéfice de la vente}} \underbrace{- K - c(k)}_{\text{coût de la commande}} \underbrace{- h(j)}_{\text{coût du stock}}$

- si $j = i+k$: on n'a rien vendu (pas de commandes ou excès de commandes)

  le "bénéfice" est $-K - c(k) - h(j)$

Donc $$R_i^k = \sum_{j=0}^{i+k} p(i+k-j) R_{ij}^k + \underbrace{\left(1 - \sum_{j=0}^{i+k} p(i+k-j)\right)}_{\text{probabilité d'avoir une demande excessive}} \underbrace{R_{i,i+k}^k}_{\text{aucune vente, donc l'état suivant est } i+k.}$$

Application $M=3$ $\quad f(u) = 8u$

$c(u) = 2u \quad K = 4$

$h(u) = u \quad p_0 = \frac{1}{4} \quad p_1 = \frac{1}{2} \quad p_2 = \frac{1}{4}$

$$R_0^0 = 0$$

$$R_1^0 = \underbrace{\frac{1}{2}(8)}_{\substack{\text{vendu 1} \\ \text{stock 0}}} + \underbrace{\frac{1}{4}(-1)}_{\substack{\text{vendu 0} \\ \text{stock 1}}} + \underbrace{\frac{1}{4}(-1)}_{\substack{\text{demande excessive} \to \text{pas de vente} \\ \text{stock 1}}} = 7/2$$

$$R_2^0 = \underbrace{\frac{1}{4}(16)}_{\substack{\text{vendu 2} \\ \text{stock 0}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(8-1)}_{\substack{\text{vendu 1} \\ \text{stock 1}}} + \underbrace{\frac{1}{4}(-2)}_{\substack{\text{vendu 0} \\ \text{stock 2}}} = 7$$ cas de demandes excessives a un probabilité nulle

$$R_3^0 = \frac{1}{4}(16-1) + \frac{1}{2}(8-2) + \frac{1}{4}(0-3) = 6$$ cas de demandes excessives ou 3 demandes ont une probabilité nulle

$$R_0^1 = \underbrace{-(4+2)}_{\substack{\text{coût commande} \\ \text{1 unité}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(8-0)}_{\substack{\text{vendu 1} \\ \text{stock 0}}} + \underbrace{\frac{1}{4}(-1)}_{\substack{\text{vendu 0} \\ \text{stock 1}}} + \underbrace{\frac{1}{4}(-1)}_{\substack{\text{demande excessive} \\ \text{stock 1.}}} = -5/2$$

$$R_1^1 = -(4+2) + \frac{1}{4}(16) + \frac{1}{2}(8-1) + \frac{1}{4}(-2) = 1$$

$$R_2^1 = -(4+2) + \frac{1}{4}(16-1) + \frac{1}{2}(8-2) + \frac{1}{4}(-3) = 0$$

$$R_0^2 = -(4+4) + \frac{1}{4}(16) + \frac{1}{2}(8-1) + \frac{1}{4}(-2) = -1$$

$$R_1^2 = -(4+4) + \frac{1}{4}(16-1) + \frac{1}{2}(8-2) + \frac{1}{4}(-3) = -2$$

$$R_0^3 = -(4+6) + \frac{1}{4}(16-1) + \frac{1}{2}(8-2) + \frac{1}{4}(-3) = -4$$

état \ action	0	1	2	3
0	0	-5/2	-1	-4
1	7/2	1	-2	
2	7	0		
3	6			