TD 01 : Décomposition en valeurs singulières

Fondements du Machine Learning, L3 IM2D

Septembre 2024

Exercice 1.1: Valeurs propres et valeurs singulières

Soit $\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$ une *SVD* de $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ avec $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1 \dots \boldsymbol{u}_m]$, $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1 \dots \boldsymbol{v}_n]$, et $\sigma_i = [\boldsymbol{\Sigma}]_{ii}$ pour tout $1 \leq i \leq \min(m,n)$.

a) Montrer que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \sigma_i \boldsymbol{u}_i$ et $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i = \sigma_i \boldsymbol{v}_i$. pour tout $1 \leq i \leq \min(m,n)$.

b) En déduire un lien entre les valeurs propres de $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ et les valeurs singulières de $\boldsymbol{A}$.

c) Si $\mathrm{rang}(\boldsymbol{A}) = r$, que peut-on dire des valeurs singulières ?

Exercice 1.2: Carrés de matrices

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice définie positive (donc symétrique). Soit $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{T}$ une décomposition en valeurs propres de $\boldsymbol{A}$, avec $\boldsymbol{P}$ orthogonale et $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonale à coefficients diagonaux ordonnés par ordre croissant $\boldsymbol{\Lambda}_{11} \geq \boldsymbol{\Lambda}_{22} \geq \cdots \geq \boldsymbol{\Lambda}_{nn}$.

a) Donner une décomposition en valeurs singulières de $\boldsymbol{A}$ basée sur la décomposition en valeurs propres ci-dessus.

b) Soit $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B} \succ 0$. Donner une décomposition en valeurs propres et une décomposition en valeurs singulières de $\boldsymbol{B}$ en fonction de celles de $\boldsymbol{A}$.

c) Que vaut $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$? Retrouver alors le lien entre les valeurs propres de $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ et les valeurs singulières de $\boldsymbol{B}$.

Exercice 1.3: SVD et factorisation QR

On appelle *factorisation QR* d'une matrice $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ toute décomposition de la forme $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, où $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est orthogonale et $\boldsymbol{R}$ est triangulaire supérieure, c'est-à-dire que $[\boldsymbol{R}]_{ij} = 0$ si $i > j$.

a) Pour toute matrice orthogonale $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, donner une décomposition en valeurs singulières de $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$ en fonction de la SVD de $\boldsymbol{X}$.

b) En déduire une décomposition en valeurs singulières de $\boldsymbol{R}$ en fonction de la SVD de $\boldsymbol{X}$ de la question a).

Exercice 1.4: Normes et valeurs singulières

On définit sur $\mathbb{R}^{m\times n}$ la norme matricielle induite et la norme de Frobenius :

$$\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \begin{cases} \|\boldsymbol{A}\| & := & \max_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \\ \|\boldsymbol{A}\|_F & := & \sqrt{\sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} [\boldsymbol{A}]_{ij}^2}. \end{cases}$$

a) En utilisant une décomposition en valeurs singulières de $\boldsymbol{A}$, montrer que $\|\boldsymbol{A}\| = \sigma_1$, où σ_1 désigne la plus grande valeur singulière de la matrice A.
Indication: Utiliser le fait que si $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ est une matrice orthogonale, on a $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^\ell$.

b) Si $\boldsymbol{A}$ est carrée et diagonalisable, que vaut $\|\boldsymbol{A}\|$?

c) Avec les notations de la question a), montrer également que

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(n,m)} \sigma_i^2}$$

où $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(n,m)}$ sont les valeurs singulières de $\boldsymbol{A}$.

Exercice 1.5: Preuve constructive de la SVD

Soit une matrice $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ non nulle.

a) En utilisant la définition de $\|\boldsymbol{X}\|$, trouver $\boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{R}^m$ tels que $\|\boldsymbol{u}_1\| = 1, \|\boldsymbol{v}_1\| = 1$ et $\boldsymbol{X}\boldsymbol{v}_1 = \sigma_1\boldsymbol{u}_1$, où $\sigma_1 = \|\boldsymbol{X}\|$.

b) Prouver alors qu'il existe $\boldsymbol{U}_1$ et $\boldsymbol{V}_1$ telles que

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{X}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \\ \hline 0 & \boldsymbol{Y}_1 \end{array}\right].$$

en précisant les dimensions de $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{Y}_1$.

c) Montrer que $\left\|\boldsymbol{X}_1 \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}\right\| \geq (\sigma_1^2 + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})$. En utilisant la valeur de $\|\boldsymbol{X}_1\|$, en déduire que $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$.

d) Conclure.

Exercice 1.6: SVD tronquée

Soit $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rang r, $\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$ une *SVD* réduite de $\boldsymbol{X}$ avec $\sigma_1 > \cdots > \sigma_r > 0$.

a) On considère la *SVD* tronquée $\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{U}_k\boldsymbol{\Sigma}_{k,k}\boldsymbol{V}_k^{\mathrm{T}}$. Evaluer $\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_k\|_F^2$.

b) Application : Supposons que $\sigma_i^2 = \frac{1}{2^i}$ $\forall i = 1, \ldots, m$. Pour tout $\epsilon > 0$, déterminer le plus petit k tel que $\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_k\|_F^2 \leq \epsilon^2$.