Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

6 décembre 2024

Aujourd'hui :

Cours : Projections et adjoints

TD : Espaces euclidiens (suite)

1) Matrices orthogonales

2) Isométries

3) Projections orthogonales

<u>Cadre</u> : E espace euclidien de dimension (finie) n

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ produit scalaire

$\| \cdot \|$ norme

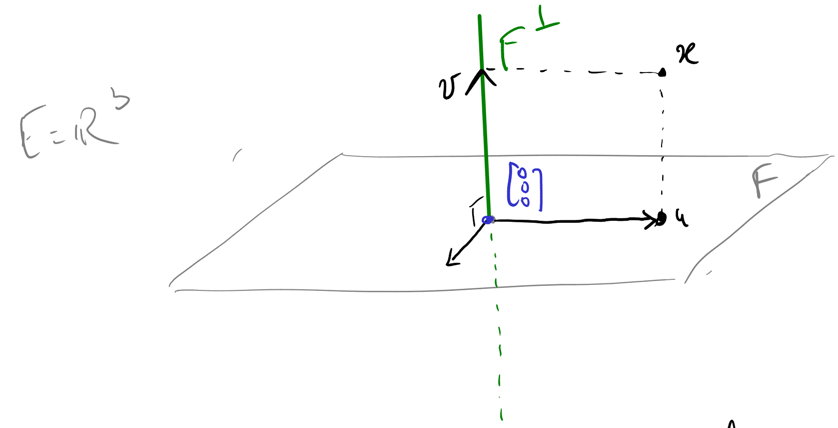
F sous-espace vectoriel de E

→ On a vu que $E = F \oplus F^\perp$

$F^\perp = \{ y \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in F \}$

$(F \cap F^\perp = \{0\})$

→ Donc tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$



On dit que u est la projection orthogonale de x sur F et on la notera $p_F(x)$.

On a alors $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x) \quad \forall x \in E$

avec $p_F(x) \in F$, $p_{F^\perp}(x) \in F^\perp$, $\langle p_F(x), p_{F^\perp}(x) \rangle = 0$

Propriétés :

a) $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$

b) Si $(e_1, \ldots, e_m)$ base orthonormale de F (par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$), alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\langle x, e_i \rangle}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{e_i}_{\in E}$$

Preuve

Puisque $E = F \oplus F^{\perp}$, il existe une base orthonormale de E de la forme

$$(\underbrace{e_1, \ldots, e_m}_{\text{base de } F}, \underbrace{e_{m+1}, \ldots, e_n}_{\text{base de } F^{\perp}})$$

Par le théorème de Pythagore, on a

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2$$

$(e_1, \ldots, e_n)$ orthogonaux $\longrightarrow$ $= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$

base orthonormale $\|e_i\| = 1 \ \forall i$

Or $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i = \boxed{p_F(x) + p_{F^{\perp}}(x)}$ $\rightarrow$ cette décomposition existe car $E = F \oplus F^{\perp}$

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i}_{\in F^{\perp}}$$

$(e_1, \ldots, e_m)$ base de F

$(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ base de $F^{\perp}$

$$\left(\text{NB: } \left\langle \sum_{i=1}^{m} \langle x,e_i\rangle e_i , \sum_{i=m+1}^{n} \langle x,e_i\rangle e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=m+1}^{n} \langle x,e_i\rangle\langle x,e_j\rangle \underbrace{\langle e_i,e_j\rangle}_{\substack{=0 \\ \text{par orthogonalité}}} \right.$$

$$= 0$$

On en déduit que $p_F(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x,e_i\rangle e_i$ par identification (montre b))

et donc que $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle x,e_i\rangle^2 \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\langle x,e_i\rangle^2}_{\geq 0}$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \langle x,e_i\rangle^2$$

$$= \|x\|^2$$

On a donc $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2 \overset{\|.\|\geq 0}{\iff} \|p_F(x)\| \leq \|x\|$ (montre a))

Cas particulier : $E = \mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \underbrace{x^T y}_{\substack{\text{notation} \\ \text{qui fait le} \\ \text{lien avec le} \\ \text{produit matriciel}}}$

Dans ce cas, si $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base orthonormée de F (sous-espace de E), alors

$$p_F(x) = P \underbrace{P^T x}_{\substack{\shortparallel \\ \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_m^T \end{bmatrix} x}} = P \begin{bmatrix} \langle x,e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x,e_m\rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \langle x,e_i\rangle e_i$$

avec $P = [e_1 \ldots e_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$

→ Cet exemple utilise le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$, qui s'exprime naturellement via des produits de matrices.

→ Pour un cadre plus général (E quelconque, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ quelconque), l'expression de la projection au moyen de matrices est plus compliquée. Elle se base notamment sur la notion d'adjoint

4) Adjoint

E euclidien

E espace vectoriel
q forme quadratique définie positive
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ forme polaire de q

Déf : Soit E euclidien de dimension n muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (endomorphisme / application linéaire)

Il existe un unique endomorphisme noté $f^* \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$$

f^* s'appelle l'adjoint (ou l'endomorphisme adjoint) de f

Propriétés de l'adjoint

- $(f^*)^* = f$

$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f^*(x), y\rangle = \langle x, (f^*)^*(y)\rangle$) définition de $(f^*)^*$ en tant qu'adjoint de f^*

définition de f^* → et $\langle f^*(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$

Par unicité de l'adjoint, on a $(f^*)^* = f$

- $\ker f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$ et $\operatorname{Im} f^* = (\ker f)^\perp$

1) $x \in \ker f^* \iff f^*(x) = 0_E \iff \langle f^*(x), y \rangle = 0 \quad \forall y \in E$

définition de l'adjoint $\iff \langle x, f(y) \rangle = 0 \quad \forall y \in E$

définition de l'image $\iff \langle x, z \rangle = 0 \quad \forall z \in \operatorname{Im} f$

définition de l'orthogonal $\iff x \in (\operatorname{Im} f)^\perp$

2) D'après 1), $\ker\left[(f^*)^*\right] = (\operatorname{Im} f^*)^\perp$

Comme $(f^*)^* = f$, $\ker f = (\operatorname{Im} f^*)^\perp$

Comme E est de dimension finie, $(F^\perp)^\perp = F \quad \forall$ sous-espace F

et donc $(\ker f)^\perp = \operatorname{Im} f^*$

Th Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une représentation de f dans une base orthonormée de E.

Alors la représentation matricielle de f^* dans cette base orthonormée est la matrice M^T.

<u>Interprétation</u> : L'endomorphisme adjoint peut être vu comme la généralisation du concept de transposée aux applications linéaires autres que des matrices.

<u>Utilisation en pratique</u> : • Via la représentation matricielle

• Pour une matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on dit que

$\underbrace{\ker M, \operatorname{Im} M}_{= f}$, $\underbrace{\ker M^T \text{ et } \operatorname{Im} M^T}_{= f^*}$ sont les sous-espaces fondamentaux de M