Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

5 décembre 2024

Cette semaine :

Cours jeudi 8^H30

Cours vendredi 8^H30

TD vendredi 10^H15 (fin TD 6)

A venir : TD vendredi 13/12

Dernières séances 17/12 et 20/12 matin (CTD)

Matrices orthogonales et applications associées

1) Définition

Def : Une matrice $P \in \mathbb{R}^{r \times n}$ est dite orthogonale si

- $\underbrace{P}_{r\times n}\underbrace{P^T}_{n \times r} = I_r$ si $r \leq n$
- $P^T P = I_n$ si $r \geq n$
- $P^T P = P P^T = I_n$ si $r = n$

Exemples :

- $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est orthogonale
- $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ est orthogonale

$$P^T P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

- $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$

$$P P^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = I_1$$

Propriétés des matrices orthogonales carrées

Soit $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale. Alors

a) Toute valeur propre réelle de P est égale à 1 ou -1

b) Les colonnes et les lignes de P forment une base orthonormée/orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ (produit scalaire canonique $x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n$)

c) $\det(P) \in \{-1, 1\}$

d) $P^T = P^{-1}$

Autre exemples
- $2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- $x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3 + \dots + n x_n y_n$
- $2x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2 x_2 y_2$

Eléments de démonstration

b) Soient $p_1, \dots, p_n$ les colonnes de P $(P = [p_1 \cdots p_n])$

Par définition d'une matrice orthogonale, $P^T P = I_n$

$$P^T P = \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \cdots p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle p_1, p_1 \rangle & \langle p_1, p_2 \rangle & \cdots & \langle p_1, p_n \rangle \\ \vdots & & & \\ \langle p_n, p_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle p_n, p_n \rangle \end{bmatrix} = I_n$$

où $p_1^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ avec $[p_1^T]_i = [p_1]_i$

(Rappel : On note parfois $\langle x, y \rangle = x^T y$)

On a donc $\langle p_i, p_i \rangle = p_i^T p_i = 1$ $\forall i = 1..n$

$\langle p_i, p_j \rangle = 0$ $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j$

Les p_i forment donc une base orthonormale

d) Comme $P^T P = P P^T = I_n$, et que l'inverse d'une matrice est définie de manière unique on a bien $P^{-1} = P^T$

a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ un vecteur propre de P

$$Px = \lambda x \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour le produit scalaire canonique, on a :

$$\langle x, P^TPx \rangle = \underbrace{x^T}_{1\times n}\underbrace{(\overset{n\times n}{P^T}\overset{n\times 1}{P}\overset{n\times 1}{x})}_{n\times 1}$$

$$= \underbrace{(x^T P^T)}_{1\times n}\underbrace{(Px)}_{n\times 1} \quad \text{(associativité du produit matriciel)}$$

$$= (Px)^T Px \quad (B^TA^T = (AB)^T \text{ par propriétés de la transposée})$$

$$= \langle Px, Px \rangle$$

$$\langle x, P^TPx \rangle = x^T \underbrace{P^TP}_{= I_n} x = x^Tx = \|x\|^2 > 0$$

$$x^TP^TPx = (Px)^TPx = \langle Px, Px \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2$$

On a donc $\lambda^2 \|x\|^2 = \|x\|^2$

$$\iff \lambda^2 = 1 \quad \text{car } x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1$$

c) Comme P et P^T ont le même déterminant, on a

$$\det(PP^T) = \det(P)^2$$

Or $PP^T = I_n$, donc $\det(PP^T) = \det(I_n) = 1$

d'où $\det(P)^2 = 1 \iff \det(P) \in \{-1, 1\}$

2) Isométries

Déf : Soit (E, q) un espace euclidien ($\Leftrightarrow$ E $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, q forme quadratique définie positive)

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire associé à q

$\| \cdot \|$: norme associée à q

On dit qu'une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie (ou un endomorphisme orthogonal) si

$$\forall x \in E, \quad \|\ell(x)\| = \|x\|$$

Propriété : $\ell \in \mathcal{L}(E)$ isométrie $\Leftrightarrow$ $\langle \ell(x), \ell(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ $\forall (x,y) \in E^2$

Démo : $(\Leftarrow)$ $x = y$, $\langle \ell(x), \ell(x) \rangle = \langle x, x \rangle$ $\forall x \in E$

$\Leftrightarrow$ $\|\ell(x)\|^2 = \|x\|^2$ $\forall x \in E$

$\Leftrightarrow$ $\|\ell(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in E$ (définition d'une isométrie)

$(\Rightarrow)$ $\forall (x,y) \in E^2$, $\|\ell(x+y)\|^2 = \langle \ell(x+y), \ell(x+y) \rangle$

$= \langle \ell(x) + \ell(y), \ell(x) + \ell(y) \rangle$

$= \langle \ell(x), \ell(x) \rangle + 2\langle \ell(x), \ell(y) \rangle + \langle \ell(y), \ell(y) \rangle$

$= \|\ell(x)\|^2 + 2\langle \ell(x), \ell(y) \rangle + \|\ell(y)\|^2$

ℓ isométrie $\rightarrow$ $= \|x\|^2 + 2\langle \ell(x), \ell(y) \rangle + \|y\|^2$

Comme ℓ est une isométrie, on a aussi :

$\|\ell(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$

$= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$

Par identification des deux expressions, on en conclut que $\langle x,y\rangle = \langle \ell(x), \ell(y)\rangle$ $\forall (x,y)$

$\hookrightarrow$ Une isométrie préserve les produits scalaires et les normes

Théorème Soit $\ell \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie.
Alors toute représentation matricielle de ℓ dans une base orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une matrice orthogonale.

$\Longrightarrow$ Les représentations matricielles de ℓ dans des bases orthonormales ont les mêmes valeurs propres et déterminants.
Lorsque le déterminant vaut 1, on dit que ℓ est une rotation.

Démo Soit $(e_1, -, e_n)$ une base orthonormale de E $(\dim E = n)$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

La représentation matricielle de ℓ dans cette base s'écrit

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad p_i = \ell(e_i)$$

exprimé dans la base $e_1, -, e_n$

On a alors $\forall i = 1..n$,

$$\boxed{\underbrace{\ell(e_i)}_{\in E} = \sum_{j=1}^{n} \langle p_i, e_j \rangle \underbrace{e_j}_{\in E}}$$

et donc

$$p_i = \begin{bmatrix} \langle \ell(e_i), e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \ell(e_i), e_n \rangle \end{bmatrix}$$

Pour montrer que P est orthogonale, on montre que les p_i forment une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

$\forall i = 1..n,$

$$\underbrace{p_i^T p_i}_{\text{produit scalaire dans } \mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle \ell(e_i), e_j \rangle^2}_{\text{produit scalaire dans } E} \underset{\text{th. de Pythagore}}{=} \underbrace{\| \ell(e_i) \|^2}_{\text{Norme associée au produit scalaire dans } E} \overset{\ell \text{ isométrie}}{=} \| e_i \|^2 \underset{\{e_i\} \text{ base orthonormale}}{=} 1$$

$\forall i \neq j,$

$$p_i^T p_j = \sum_{k=1}^{n} \langle \ell(e_i), e_k \rangle \langle \ell(e_j), e_k \rangle$$

$\lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$

$\sum_{k=1}^{n} \langle x, \lambda_k y_k \rangle = \langle x, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \rangle$

bilinéarité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle \ell(e_j), \underbrace{\langle \ell(e_i), e_k \rangle e_k}\rangle$$

$$= \langle \ell(e_j), \sum_{k=1}^{n} \langle \ell(e_i), e_k \rangle e_k \rangle$$

décomposition de $\ell(e_i)$ selon la base $(e_1, \dots, e_n)$

$$= \langle \ell(e_j), \ell(e_i) \rangle$$

ℓ isométrie

$$= \langle e_j, e_i \rangle \underset{\{e_i\} \text{ base orthormale de } E}{=} 0$$

On a donc montré que les $\{p_i\}$ sont une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique, d'où $P^T P = I_n$.

De même, on justifie que $PP^T = I_n$, et on en conclut que P est orthogonale.

Exemple : Isométries dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique

$\longrightarrow$ Une isométrie dans $\mathbb{R}^2$ est représentée dans la base canonique par une matrice orthogonale

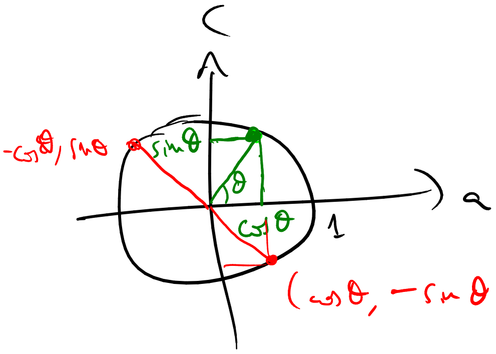
$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$$

Pour que les deux colonnes de P forment une base orthonormale, on doit avoir :

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = 0$$



$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = \cos\theta \\ c = \sin\theta \\ b = \sin\varphi \\ d = \cos\varphi \\ \underbrace{\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi}_{\sin(\theta+\varphi)} = 0 \end{cases}$$

$\sin(\theta + \varphi) = 0$

$\Longleftrightarrow \theta = -\varphi + k\pi$

Représentation des isométries dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$\det(\ ) = 1$ $\qquad\qquad$ $\det(\ ) = -1$

"rotation"

$\theta = -\varphi + 2k\pi$ $\qquad\qquad$ $\theta = -\varphi + (2k+1)\pi$