# Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

22 novembre 2024

Cours du jour : Orthogonalité

## Cadre de travail

$E$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$q : E \to \mathbb{R}$ forme quadratique définie positive

$(E,q)$ : espace préhilbertien (euclidien si de dim. finie)

→ Forme polaire de $q$ : "produit scalaire" $\langle \cdot,\cdot \rangle : E\times E \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$

→ Norme sur $E$ : $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{q(x)}$

**Rappel de définition :** Deux vecteurs $x$ et $y$ de $E$ sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle = 0$

. Une famille de vecteurs 2 à 2 orthogonaux s'appelle une famille orthogonale (orthonormale si tous les vecteurs sont de norme 1)

Ex) $E = \mathbb{R}^3$, $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ est une base et une famille orthonormale

$(e_1' = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, e_2, e_3)$ orthogonale pas orthonormale $\|e_1'\| = 2$

**Théorème :** Soit $(E,q)$ un espace euclidien de dimension $n$.

et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. quelconque

Alors il existe une base orthonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ de $E$ (base + famille orthonormale) telle que

$\forall k = 1..n, \quad \text{vect}(e_1, \ldots, e_k) = \text{vect}(u_1, \ldots, u_k)$

**Preuve constructive** (On montre l'existence en construisant la base)

↳ Procédé / Algorithme pour "orthonormaliser" une base : procédé de Gram-Schmidt

<u>Itératif</u>

<u>k=1</u> : On pose $v_1 = e_1$. $\quad \text{vect}(v_1) = \text{vect}(e_1)$

<u>k=2</u> : On pose $v_2 = e_2 - \dfrac{\langle v_1, e_2\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

- $\langle v_2, v_1 \rangle = \left\langle e_2 - \dfrac{\langle v_1, e_2\rangle}{\|v_1\|^2} v_1, v_1 \right\rangle$

$\langle au + bv, y\rangle = a\langle u, y\rangle + b\langle v, y\rangle \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ \forall (u,v,y) \in E^3$

$$= \langle e_2, v_1\rangle - \frac{\langle v_1, e_2\rangle}{\|v_1\|^2}\langle v_1, v_1\rangle$$

$$= \langle e_2, v_1\rangle - \langle v_1, e_2\rangle = 0$$

- $\text{vect}(e_1, e_2) = \text{vect}(v_1, v_2)$

D'une part, $v_2 = e_2 - \dfrac{\langle v_1, e_2\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = e_2 - \dfrac{\langle v_1, e_2\rangle}{\|v_1\|^2} e_1 \in \text{vect}(e_1, e_2)$

$e_1 = v_1 \in \text{vect}(e_1, e_2)$

$$\Rightarrow \text{vect}(v_1, v_2) \subset \text{vect}(e_1, e_2)$$

D'autre part, $e_1 = v_1 \in \text{vect}(v_1, v_2)$

$$e_2 = \underbrace{v_2 + \frac{\langle v_1, e_2\rangle}{\|v_1\|^2} e_1}_{= v_2 + \frac{\langle v_1, e_2\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \in \text{vect}(v_1, v_2)} = e_2 - \frac{\langle v_1, e_2\rangle}{\|v_1\|^2} \underset{= e_1}{v_1} + \frac{\langle v_1, e_2\rangle}{\|v_1\|^2} e_1$$

$\Longrightarrow \text{vect}(e_1, e_2) \subset \text{vect}(v_1, v_2)$

$\underline{k}$ On a $(v_1, \ldots, v_{k-1})$ avec $v_i^T v_j = 0$ si $i \neq j$

et $\text{vect}(v_1, \ldots, v_j) = \text{vect}(e_1, \ldots, e_j)$ $\forall j = 1..k-1$

On pose :

$$v_k = e_k - \frac{\langle v_1, e_k\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, e_k\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \cdots - \frac{\langle v_{k-1}, e_k\rangle}{\|v_{k-1}\|^2} v_{k-1}$$

$\longrightarrow$ On a alors $\text{vect}(v_1, \ldots, v_k) = \text{vect}(e_1, \ldots, e_k)$

et $\langle v_k, v_j\rangle = 0$ $\forall j \neq k$ par les mêmes arguments que ci-dessus

Ex) $$\langle v_k, v_1\rangle = \left\langle e_k - \frac{\langle v_1, e_k\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, e_k\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \cdots - \frac{\langle v_{k-1}, e_k\rangle}{\|v_{k-1}\|^2} v_{k-1}, v_1 \right\rangle$$

$$= \langle e_k, v_1\rangle - \frac{\langle v_1, e_k\rangle}{\|v_1\|^2} \langle v_1, v_1\rangle - \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\langle v_j, e_k\rangle}{\|v_j\|^2} \underbrace{\langle v_j, v_1\rangle}_{\substack{= 0 \\ \text{par construction}}}$$

$$= \langle e_k, v_1\rangle - \frac{\langle v_1, e_k\rangle}{\|v_1\|^2} \langle v_1, v_1\rangle$$

$$= \langle e_k, v_1\rangle - \langle v_1, e_k\rangle = 0$$

$\longrightarrow$ En répétant ce processus $n$ fois, on obtient $(v_1, \ldots, v_n)$ base de $E$ et famille orthogonale

En posant finalement $u_k = \dfrac{v_k}{\|v_k\|}$ $\forall k = 1..n$, on

obtient une base de $E$ qui vérifie $\text{vect}(u_1, \ldots, u_k)$
$= \text{vect}(v_1, \ldots, v_k)$
$= \text{vect}(e_1, \ldots, e_k)$ $\forall k = 1..n$

$$\langle u_i, u_j\rangle = \frac{\langle v_i, v_j\rangle}{\|v_i\|\|v_j\|} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \dfrac{\langle v_i, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$\Rightarrow (u_1, \ldots, u_n)$ est une famille orthonormale

$$\|u_i\| = \sqrt{\langle u_i, u_i \rangle} = \sqrt{1} = 1$$

FIN PREUVE

## Conséquences de ce résultat

- Sans perte de généralité, on peut considérer des bases orthonormales au lieu de bases quelconques dans des espaces euclidiens

⚠ Le procédé ne s'applique en pratique qu'en dimension finie (càd soit pour un espace euclidien, soit pour un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel)

## Sous-espaces orthogonaux

$\perp$ : "perpendiculaire" ou "orthogonal"

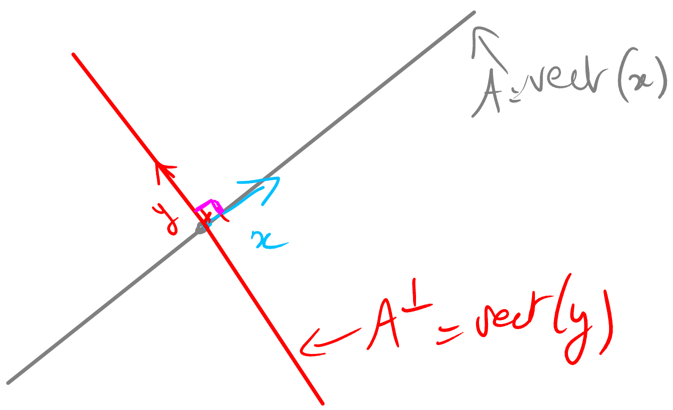
$(E, \varphi)$ préhilbertien réel

"A orthogonal"

Déf. : $\forall A \subseteq E$, on note $A^\perp = \{ y \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in A \}$

Si $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$, $A^\perp$ est aussi un sous-espace vectoriel de $E$. qui s'appelle le sous-espace orthogonal de $A$.

Ex) $\mathbb{R}^2$



Propriétés  Soient $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

Alors

i) $F \subseteq G \Rightarrow G^\perp \subseteq F^\perp$

ii) $F \subseteq F^{\perp\perp} := (F^\perp)^\perp$

iii) $F^\perp = F^{\perp\perp\perp} := (F^{\perp\perp})^\perp$

(iii) + (iv)

$(F^{\perp\perp})^\perp = F^{\perp\perp}$

$\neq F = F^\perp$

Si $E$ est de dimension finie, on a

iv) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

v) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

vi) $F = F^{\perp\perp}$

vii) $E = F \oplus F^\perp$

---

Remarque : $E = C([0,1], \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie

"Fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$"

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$

$\left( q(f) = \int_0^1 f(x)^2\, dx \right)$

$F = \{ f \in E \mid f(0) = 0 \}$

$F^\perp = \{ g \in E \mid \langle f, g \rangle = 0 \ \forall f \in F \} = \{ 0_E \}$

$x \in [0,1] \mapsto 0$

$F^{\perp\perp} = \{ g \in E \mid \langle f, g \rangle = 0 \ \forall f \in F^\perp \}$

$= \{ g \in E \mid \langle 0_E, g \rangle = 0 \} = E \supsetneq F$

$F^{\perp\perp\perp} = (F^{\perp\perp})^\perp = \{ g \in E \mid \langle f, g \rangle = 0 \ \forall f \in F^{\perp\perp} \}$

$= \{ g \in E \mid \langle f, g \rangle = 0 \ \forall f \in E \} = \{ 0_E \} = F^\perp$

## Preuve

i) $F \subseteq G \Rightarrow G^\perp \subseteq F^\perp$

$$G^\perp = \{ y \in E \mid \langle x,y \rangle = 0 \ \forall x \in G \}$$

Soit $y \in G^\perp$. Alors $\langle x,y \rangle = 0 \ \forall x \in G$

$$\overset{F \subseteq G}{\Longrightarrow} \langle x,y \rangle = 0 \ \forall x \in F$$

$$\Leftrightarrow y \in F^\perp$$

Donc $G^\perp \subseteq F^\perp$

ii) $F \subset F^{\perp\perp}$

Soit $x \in F$. Alors $\forall y \in F^\perp$, $\langle x,y \rangle = 0$ par définition

$$\left( F^\perp = \{ y \in E \mid \langle x,y \rangle = 0 \ \forall x \in F \} \right)$$

Comme $F^{\perp\perp} = \{ z \in E \mid \langle y,z \rangle = 0 \ \forall y \in F^\perp \}$, on

on conclut que $x \in F^{\perp\perp}$, et donc que

$$F \subseteq F^{\perp\perp}$$

iii) $F^\perp = F^{\perp\perp\perp}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{(ii) } F \subseteq F^{\perp\perp} \overset{(i)}{\Longrightarrow} F^{\perp\perp\perp} \subseteq F^\perp \\ \text{(ii) avec } F^\perp \Rightarrow F^\perp \subseteq (F^\perp)^{\perp\perp} = F^{\perp\perp\perp} \end{array}\right) \Rightarrow F^\perp = F^{\perp\perp\perp}$$

## (vi) $F = F^{\perp\perp}$ en dimension finie

(On a déjà $F \subset F^{\perp\perp}$ par (ii))

$F$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, notée $p$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de $F$

$F = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_p)$

Alors, pour tout $x \in F^{\perp\perp}$, on a :

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i}_{\in F} + \underbrace{\left( x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \right)}_{\in F^{\perp}}$$

$$\forall j = 1..p, \quad \left\langle x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i , e_j \right\rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0$$

$$= \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle$$

$$= \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \overbrace{\langle e_j, e_j \rangle}^{=1}$$

$$= \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0$$

Puisque $x \in F^{\perp\perp}$, on a $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in F^{\perp}$

$$\Rightarrow \left\langle x, x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle = 0 \qquad (y \text{ particulier dans } F^{\perp})$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i + x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i , x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i , x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle$$

$$+ \left\langle x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i , x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i}_{\in F},\ \underbrace{x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i}_{\in F^\perp} \right\rangle = 0$$

On a donc

$$x \in F^{\perp\perp} \Rightarrow \left\langle x,\ x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i,\ x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\| x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i = 0_E$$

$$\Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \in F$$