Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

21 novembre 2024

Cette semaine

- Aujourd'hui : Fin TD 5 (correction en ligne dès 10h15)
- Demain : CC + cours (orthogonalité)

TD 5, exercice 5.2 : Représentation de forme Quadratique

$$q : \mathbb{R}^{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \operatorname{trace}(M^T M)$$

a) Justifier que $q(\lambda M) = \lambda^2 q(M)$ ✓

Remarque : q forme quadratique $\iff \begin{cases} q(\lambda M) = \lambda^2 q(M) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ (M,N) \mapsto \frac{1}{2}\left(q(M+N) - q(M) - q(N)\right) \text{ est bilinéaire symétrique} \end{cases}$

b) Forme polaire de q : $p : (M,N) \mapsto \operatorname{trace}(M^T N)$ ✓

c) Ecrire la matrice représentative de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^{3\times 3}$

Base canonique de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ (espace vectoriel de dimension 9)

$$\forall M \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$= M_{11}\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix} + M_{12}\begin{bmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix} + M_{13}\begin{bmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}$$
$$+ M_{21}\begin{bmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix} + M_{22}\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{bmatrix} + M_{23}\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{bmatrix}$$

Base canonique de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ (à une permutation près)

$$+ M_{31}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix} + M_{32}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} + M_{33}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

→ On fixe un ordre dans lequel on décrit les vecteurs de la base :

$$E_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad E_4 = \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$E_5 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad E_6 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \quad E_7 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix} \quad E_8 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \quad E_9 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

NB : Autre indexation possible

$$E_{1,1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \quad E_{1,3} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

↳ La représentation matricielle de q dans la base $(E_1, -, E_9)$ est une matrice de taille 9×9, dont les coefficients sont donnés par les valeurs de $\{p(E_i, E_j)\}_{\substack{i=1..9\\ j=1..9}}$

. Par symétrie, $p(E_i, E_j) = p(E_j, E_i)$

⇒ Besoin de ne calculer "que" $\frac{9(9+1)}{2} = 45$ coefficients.

① $i = j$

$$p(E_i, E_i) = q(E_i) = \operatorname{trace}(E_i^T E_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left[E_i^T E_i\right]_{kk} \longrightarrow \text{coefficients diagonaux de } E_i^T E_i$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \left[E_i^T\right]_{kl} \left[E_i\right]_{lk}$$

$$\overset{m\times n}{C} = \overset{m\times n}{A}\,\overset{n\times n}{B}$$

$$[C]_{ab} = \sum_{l=1}^{n} [A]_{al} [B]_{lb}$$

$\forall (a,b)$

$$[A^T]_{ab} = [A]_{ba}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} [E_i]_{\ell k}[E_i]_{\ell k}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} [E_i]_{\ell k}^2 = 1$$

$i = 1$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$E_1^T E_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{trace}(E_1^T E_1) = 1$$

(2) $i \neq j$

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$E_1^T E_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{trace}(E_1^T E_2) = 0$$

plus généralement, $\operatorname{trace}(E_1^T E_j) = 0$ si $j \neq 1$

$j \neq i$

$$p(E_i, E_j) = \operatorname{trace}(E_i^T E_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} [E_i^T E_j]_{kk}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} [E_i^T]_{k\ell}[E_j]_{\ell k}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} [E_i]_{\ell k}[E_j]_{\ell k}$$

) produit des coefficients de E_i et E_j par position

$j \neq i \Rightarrow \forall (\ell, k)$, soit $[E_i]_{\ell k} = 1$ et $[E_j]_{\ell k} = 0$

soit $[E_i]_{\ell k} = 0$ et $[E_j]_{\ell k} = 1$

soit $[E_i]_{\ell k} = 0$ et $[E_j]_{\ell k} = 0$

$$\operatorname{trace}(E_i^T E_j) = 0 + 0 + 0 + \underbrace{1}_{\text{coeff non nul de } E_i} \times 0 + 0 \times \underbrace{1}_{\text{coeff non nul de } E_j} + 0 + 0 + 0 + 0$$

$p(E_i, E_j) = \mathrm{trace}(E_i^T E_j) = 0$

<u>Conclusion</u> : La représentation matricielle de q dans la base $(E_1, \ldots, E_9)$ est

$q(E_i) = p(E_i, E_i)$

$p(E_i, E_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = I_9 \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$$

<u>NB</u> : Se déduit du fait que (E_i) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ pour le produit scalaire défini par p

d) $q_A : M \longmapsto \mathrm{trace}(M^T A M)$ avec A matrice symétrique de $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Adapter le raisonnement de la question c).

$\rightarrow$ On veut toujours une expression matricielle de q_A dans la base canonique de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ $(E_1, \ldots, E_9)$

$\rightarrow$ Forme polaire de q_A : $\quad p_A : (M, N) \longmapsto \mathrm{trace}(M^T A N)$

- $\forall M, \; q_A(M) = p_A(M, M)$
- p_A est bilinéaire
- p_A est symétrique (car A est symétrique)

$(ABC)^T = C^T B^T A^T$

$p_A(N, M) = \mathrm{trace}(N^T A M) = \mathrm{trace}((N^T A M)^T)$

$\mathrm{trace}(B) = \mathrm{trace}(B^T)$

$= \mathrm{trace}(M^T A^T (N^T)^T)$

$(N^T)^T = N, \; A^T = A$

$= \mathrm{trace}(M^T A N) = p_A(M, N)$

→ Il "suffit" donc de calculer les $p_A(E_i, E_j)$ pour avoir la représentation matricielle

Si $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ (A symétrique), la représentation matricielle de q_A dans la base canonique est

$p_A(E_1, E_4)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 \\
0 & A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 \\
0 & 0 & A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} \\
\hline
A_{12} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 \\
0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 \\
0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} \\
\hline
A_{13} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 \\
0 & A_{13} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & A_{33} & 0 \\
0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & A_{33}
\end{array}\right]$$

Si $A = I_3$ (question c), on retrouve le résultat de la question c)

$$p_A(E_1, E_4) = \text{trace}(E_1^T A E_4) = \text{trace}(E_1 A E_4)$$

$$E_1 A E_4 = E_1 \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{12} & 0 & 0 \\ A_{22} & 0 & 0 \\ A_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} & 0 & 0 \\ A_{22} & 0 & 0 \\ A_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{trace}(E_1 A E_4) = A_{12}$$

Principes génériques : a. $i = j$

b. E_i et E_j ont leur 1 sur la même ligne mais pas la même colonne a E_1, E_1

b) $E_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

$E_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

c) E_1 et $E_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

c . ———— 1 sur la même colonne mais pas la même ligne

d . E_i et E_j ont leur 1 sur des lignes et des colonnes différentes

$\left(Ex : \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \text{ et } \underbrace{\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}}_{E_6} \right)$

Ex 5.3

Donner les caractéristiques des formes quadratiques associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

caractéristiques : définie ? dégénérée ? semi-définie positive/négative ? définie positive/négative ?

↳ $A > 0$ (définie positive)

$\forall X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}, \ X \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$X^T A X = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 \\ -x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 4x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 4x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= 4x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2)$$

$$= 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$$

Alternative au calcul

Déduire la forme quadratique directement de A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

pas de terme en x_1x_3 dans la forme quadratique

≥ 0 et $= 0$ si et seulement si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Donc $A \succ 0$

La forme quadratique associée est donc définie positive. Elle est également non dégénérée (car définie)

q Définie : $q(x) = 0 \iff x = 0$

Non dégénérée : $\mathrm{Ker}(q) = \{x \mid p(x,y) = 0 \ \forall y\} = \{0\}$

↳ B n'est ni semi-définie positive ni semi-définie négative

$$[1\ 0\ 0]\ B \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} < 0 \qquad [0\ 1\ 0]\ B \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} > 0$$

(Rappel : Semi-définie positive $X^T B X \geq 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

Semi-définie négative $X^T B X \leq 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

définie positive/négative : inégalité stricte si $X \neq \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$)

B est non dégénérée mais pas définie