Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

14 novembre 2024

Aujourd'hui : Espaces euclidiens / Orthogonalité

Demain : Correction Partiel + TD formes quadratiques

⚠ Rappel : CC le 22/11 !

1 Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

Def : E $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie positive.

→ On dit que (E, q) définit un espace préhilbertien réel. (Si E est de dimension finie, on parle d'espace euclidien)

→ La forme polaire associée à q s'appelle alors le produit scalaire de l'espace préhilbertien réel (E, q).

Notations possibles : $(\cdot | \cdot) : (x,y) \longmapsto (x|y)$

$\langle \cdot , \cdot \rangle : (x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle$ } Notations classiques

$\langle x,y \rangle$ = "x scalaire y"

$p : (x,y) \longmapsto p(x,y)$

→ La norme préhilbertienne de (E, q) est définie comme l'application $x \in E \longmapsto \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{q(x)}$

On la note $\|.\|$ $\left(\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}\right)$

$\|x\|$ "norme de x"

Exemples :

- $E = \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$

$\langle x,y \rangle = xy$ $\qquad \|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$

- $E = \mathbb{R}^n$ $n \geq 1$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad (\equiv x^T y)$

Notation spécifique (identifie $x \in \mathbb{R}^n$ et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$)

Norme dite euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ → $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$\cdot \ E = \mathbb{R}[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients réels)

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ q(P) = \int_0^1 P(X)^2 dX$$

$\langle P,P \rangle = q(P)\ \forall P$

$\langle P,R \rangle = \langle R,P \rangle$

$$\langle P, R \rangle = \int_0^1 P(x) R(x) dX$$

$$\|P\| = \sqrt{\int_0^1 P(x)^2 dX}$$

Propriétés de la norme préhilbertienne

(E, q) espace préhilbertien réel, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire

$\|\cdot\|$ norme

1) $\forall x \in E,\quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire ou de Minkowski)
$\forall x, y \in E^2$

3) $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$

4) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

5) $|\langle x,y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff x$ et y sont liés (pas linéairement indépendants)

$\iff$ famille (x,y) liée
$\iff$ x et y colinéaires

6) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff x = 0_E$ ou $y = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$

Remarques : $\cdot$ 2) + 3) + 4) : Axiomes que doit vérifier une norme au sens topologique

. 1) et 2) se généralisent à une forme quadratique semi-définie positive. (démonstration identique)

Démonstration

1) $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$ $\qquad \|x\| = \sqrt{q(x)}$

Soient $(x,y) \in E^2$ et soit $t \in \mathbb{R}$.

Alors $q(tx+y) \geq 0$ car q est (définie) positive

$$q(tx+y) = \langle tx+y, tx+y\rangle$$
$$= t\langle x, tx+y\rangle + \langle y, tx+y\rangle$$
$$= t^2\langle x,x\rangle + t\langle x,y\rangle + t\langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$$= t^2\langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$= t^2 q(x) + 2t\langle x,y\rangle + q(y)$$
$$= t^2\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

On doit donc avoir $\underbrace{t^2\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|y\|^2}_{\pi(t)} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\pi(t)$: polynôme d'ordre 2 en t (trinôme du second degré)

Un trinôme du second degré est ≥ 0 ssi son coefficient d'ordre 2 est ≥ 0 et son discriminant est négatif ou nul.

$$\pi(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff \Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

$$\iff 4\langle x,y\rangle^2 \leq 4\|x\|^2\|y\|^2$$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$$\iff |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

5) D'après ce qui précède, $q(tx+y) \geq 0 \iff |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

Par le même raisonnement, on obtient que

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\| \iff \exists t \in \mathbb{R},\ q(tx+y) = 0$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R},\ tx+y = 0$$

$\iff$ x et y sont colinéaires

2) ($\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$)

Soient $(x,y) \in E^2$

$$\|x+y\|^2 = q(x+y) = \langle x+y,\ x+y\rangle$$

$$\underset{\text{bilinéarité de } \langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\underset{\text{Symétrie de } \langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\underset{\text{définition de } \|\cdot\|}{=} \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Cauchy Schwarz

$\langle x,y\rangle \leq |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

On vient de montrer que $\|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2$. Comme les normes sont des quantités positives ou nulles, cela est équivalent à

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$ càd Minkowski

6) Pour avoir égalité, il faut avoir $\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\|$

donc x et y sont colinéaires.

Si $x=0$, on a le résultat.

Sinon, comme x et y sont colinéaires, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $y = \lambda x$

on a alors $\langle x,y\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda \langle x,x\rangle = \lambda q(x)$

$$\overbrace{\lambda}^{\in\mathbb{R}} \underbrace{q(x)}_{\geq 0} = \underbrace{\|x\|}_{\geq 0} \underbrace{\|\lambda x\|}_{\geq 0} \Longrightarrow \lambda \geq 0$$

2) Orthogonalité

Définition : Soit (E,q) un espace préhilbertien réel, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ produit scalaire

- On dit que deux vecteurs $(x,y) \in E^2$ sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle = 0$
- On parle de famille orthogonale $(x_i)_{i\in I} \subset E$ si $\forall (i,j) \in I^2$, $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ si $i \neq j$
- On parle de famille orthonormale $(x_i)_{i\in I} \subset E$ si

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

NB : En anglais, "orthogonal" peut être utilisé pour "orthonormal(e)"

Remarque : $\langle x_i, x_i\rangle = \|x_i\|^2$

Donc dans une famille orthonormale, tous les vecteurs ont une norme égale à 1 : on dit qu'ils sont unitaires (ou de norme 1)

<u>Exemples :</u> $E = \mathbb{R}^2$ $\quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$

. $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ forment une famille orthonormale

$$\langle x, y \rangle = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$
$$\|y\| = \sqrt{\langle y, y \rangle} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

. $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont orthogonaux

$$\langle x, y \rangle = 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$$
$$\|x\| = \sqrt{2} = \|y\|$$

$E = \mathbb{R}^{2\times 2}$

. $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $B_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sont orthogonales

pour $\quad q(A) = \mathrm{trace}(A^T A) = A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{12}^2 + A_{21}^2$

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{trace}(A^T B)$$

$$\mathrm{trace}(A_0^T B_0) = \mathrm{trace}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\right) = 2 - 2 = 0$$

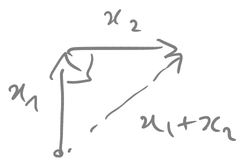
<u>Théorème de Pythagore</u>

Soit (E, q) un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Soient $x_1, \ldots, x_m$ une famille orthogonale de vecteurs de E.

Alors $\quad \|x_1+x_2+\dots+x_m\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|x_j\|^2$

$\mathbb{R}^2$



Démo

$$\|x_1+x_2+\dots+x_m\|^2 = q(x_1+\dots+x_m) \quad \text{par définition}$$
$$= \langle x_1+\dots+x_m, x_1+\dots+x_m\rangle$$
$$= \langle x_1, x_1\rangle + \langle x_2, x_1\rangle + \dots + \langle x_m, x_1\rangle$$
$$+ \langle x_1, x_2\rangle + \langle x_2, x_2\rangle + \dots + \langle x_m, x_2\rangle$$
$$+ \dots$$
$$+ \langle x_1, x_m\rangle + \langle x_2, x_m\rangle + \dots + \langle x_m, x_m\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \langle x_i, x_i\rangle + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\neq i} \underbrace{\langle x_i, x_j\rangle}_{=0}$$

$(x_i)_{i=1..m}$ orthogonale

$$= \sum_{i=1}^{m} \langle x_i, x_i\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2$$