Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

8 novembre 2024

Aujourd'hui : Formes quadratiques (suite)

Rappel : Formes quadratiques

$q : E \longrightarrow \mathbb{K}$, E $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Applications bilinéaires de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$

q forme quadratique $\iff \exists!\, p \in \mathcal{L}(E, E ; \mathbb{K})$ symétrique telle que

"il existe un(e) unique"

$$q(x) = p(x, x) \quad \forall x \in E$$

p s'appelle la forme polaire associée à q

p symétrique $\iff p(x,y) = p(y,x) \quad \forall (x,y) \in E^2$

Proposition

$\forall (x,y) \in E^2,$

$$p(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$$

Identité du parallélogramme

$$p(x,y) = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y)\right]$$

$$q(x+y) + q(x-y) = 2\left(q(x) + q(y)\right)$$

identités remarquables

Ex) $E = \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$, $p(x,y) = xy$, $\quad xy = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - x^2 - y^2\right)$ 1re identité

→ La notion de forme quadratique se définit dans des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ou infinie

→ Dans le cas de la dimension finie, une forme quadratique admet des représentations matricielles.

Proposition

Si $q : E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, alors si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on a $\quad q(x) = X^T M X \quad \forall x \in E$

où . $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ est la matrice (colonne) des coordonnées de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$

. $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est la matrice représentant q dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$

(i) Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{bmatrix}$, on a alors $q(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_{ii} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} M_{ij} x_i x_j}_{\text{polynôme de degré 2 en les } x_i}$

$i=n : \sum_{j=i+1}^{n} = 0$

(ii) M est symétrique, càd que $M = M^T$

Justification :

Puisque q est associée à une unique forme bilinéaire symétrique p, on a $q(x) = p(x,x) \quad \forall x \in E$

Or on a vu que p admet une représentation matricielle dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$: $p(x,y) = X^T M Y$ avec X, Y les matrices des coordonnées de x, y dans la base et $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Par conséquent, $q(x) = p(x,x) = X^T M X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij} x_i x_j$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{bmatrix}$ $\qquad = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} M_{ij} x_i x_j$

$M = [M_{ij}]$

Comme p est symétrique, $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, i \neq j$

$p(e_i, e_j) = p(e_j, e_i) \qquad (e_1, \ldots, e_n)$ base de E

$E_i^T M E_j = E_j^T M E_i \qquad E_i$ vecteur des coordonnées de e_i dans la base

$$ME_i = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1i} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & & & \\ M_{n1} & \cdots & M_{ni} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} M_{1i} \\ \vdots \\ M_{ji} \\ \vdots \\ M_{ni} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

$$E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad E_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$E_j^T M E_i = [0 - 0 \ \underset{\overset{\uparrow}{j}}{1} \ 0 - 0] \begin{bmatrix} M_{ji} \end{bmatrix} \quad \text{donc} \quad E_j^T M E_i = M_{ji}$$

De même, $E_i^T M E_j = M_{ij}$

$$E_j^T M E_i = E_i^T M E_j \iff M_{ij} = M_{ji} \ \forall i \neq j \iff M \text{ symétrique}$$

On a donc
$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} M_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_{ii} x_i^2 + M_{12} x_1 x_2 + M_{13} x_1 x_3 + \dots + M_{1n} x_1 x_n$$
$$+ M_{21} x_2 x_1 + M_{23} x_2 x_3 + \dots + M_{2n} x_2 x_n$$
$$+ M_{31} x_3 x_1 + M_{32} x_3 x_2 + \dots + M_{3n} x_3 x_n$$
$$+ \ \dots \ + \ \dots \ + M_{(n-1)n} x_{n-1} x_n$$
$$+ M_{n1} x_n x_1 + M_{n2} x_n x_2 + M_{n3} x_n x_3$$
$$+ \dots + M_{n(n-1)} x_n x_{n-1}$$

$M_{12} x_1 x_2$
$+ M_{21} x_2 x_1$
$= 2 M_{12} x_1 x_2$

$M_{13} x_1 x_3$
$+ M_{31} x_3 x_1 = 2 M_{13} x_1 x_3$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} M_{ij} x_i x_j$$

Remarque : Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de E, on écrit
$$q(x) = x^T M x$$
en identifiant x et son vecteur de coordonnées

Théorème

E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

L'espace $Q(E)$ des formes quadratiques de E est isomorphe à l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{K}^{n\times n}$

et donc

$Q(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension

$$\dim(Q(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\rightarrow$ L'application
$$\varphi : Q(E) \longrightarrow S^n(\mathbb{K}) := \{ M \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid M \text{ symétrique} \}$$
$$q \longmapsto M$$
où M représentation de q dans une base de E fixée

est un isomorphisme (application linéaire bijective)

- injective $M = 0_{\mathbb{K}^{n\times n}} \Leftrightarrow q : x \mapsto 0$
- surjective $\forall M \in S^n(\mathbb{K})$, $\exists q$ tel que $\varphi(q) = M$

$$q(X) = X^T M X$$

Dimension de $S^n(\mathbb{K})$: Comme $M_{ij} = M_{ji}$ $\forall i \neq j$ $\forall M \in S^n(\mathbb{K})$,

$S^n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices

n matrices $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$\dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\{ M \mid M_{ij} = M_{ji} = 1, \; M_{lh} = 0 \; l \neq i \text{ ou } k \neq j \}$

paires de coefficients (i,j) avec $i<j$ / nombre de coefficients au-dessus de la diagonale

$$\underbrace{n-1}_{(1,2),(1,3)\,\cdots\,(1,n)} + \underbrace{n-2}_{(2,3)\,\cdots\,(2,n)} + n-3 + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Au total, on a $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ matrices qui forment une famille génératrice et libre de $S^n(\mathbb{K})$: c'est donc une base et on en déduit que $\dim(S^n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$

(Ex) $n=2$ $\quad S^n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \right\}$

$\dim(S^n(\mathbb{K})) = 3$

$n=3$ $\quad M \in S^3(\mathbb{K})$, $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}$ $\quad$ • 3 $\quad$ n $\quad$ 3

$\left.\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right] \frac{n(n-1)}{2}$ $\quad 3 \times \frac{2}{2} = 3$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{3\times 4}{2} = 6$$

Obtention de M à partir de q

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

• Calcul de la représentation matricielle de q dans la base canonique

Si M est cette représentation, $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix}$ et

on doit avoir

$$q(x) = x^T M x = M_{11}x_1^2 + M_{22}x_2^2 + M_{33}x_3^2 + 2M_{12}x_1x_2 + 2M_{13}x_1x_3 + 2M_{23}x_2x_3$$

Par identification, on obtient $\quad M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

. Ecrire la forme polaire associée à q

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$$

On cherche p bilinéaire symétrique telle que $q(x) = p(x,x)$

Méthodologie : $x_i^2 \longrightarrow x_i y_i$

$$x_i x_j \longrightarrow \frac{1}{2}\left(x_i y_j + \underbrace{y_i x_j}_{= x_j y_i}\right)$$

$$p(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 - 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1$$
$$-4x_2y_3 - 4x_3y_2$$

On a bien $p(x,y) = p(y,x)\ \forall x,y$, $q(x) = p(x,x)\ \forall x$
et p est bien bilinéaire

(on a aussi $p(x,y) = x^T M y = y^T M x$)

Formes quadratiques définies positives

Déf : Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique sur E $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
et soit $p \in \mathcal{L}(E,E;\mathbb{K})$ sa forme polaire.

- Le noyau de q est l'ensemble

$$\ker(q) = \ker(p) = \{x \in E \mid \forall y \in E,\ p(x,y) = p(y,x) = 0\}$$

en dimension finie

NB : Si M est une représentation matricielle de q (dans une base),
alors $x \in \ker(q) \iff X \in \ker(M)$ avec X la matrice des coordonnées de x dans la base.

- On dit que q est non dégénérée si $\ker(q) = \{0_E\}$

- On dit que $x \in E$ est isotrope pour q si $q(x) = 0$
- On dit que q est définie si le seul vecteur isotrope de q est 0_E

→ Tout vecteur de $\ker(q)$ est isotrope pour q

$\forall x \in \ker(q)$, $p(x,y) = 0 \ \forall y \in E \Rightarrow p(x,x) = q(x) = 0$

$\Rightarrow x$ est isotrope

→ Toute forme définie est non dégénérée

q définie $\Leftrightarrow q(x) = 0$ si et seulement si $x = 0_E$

Donc $\forall y \in \ker(q)$, $p(y,z) = 0 \ \forall z \in E \Rightarrow p(y,y) = 0$

$\Leftrightarrow q(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0_E$

Donc q est non dégénérée

---

q définie : $q(x) = p(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

q non dégénérée : $p(x,y) = 0 \ \forall y \in E \Leftrightarrow x = 0_E$

<u>Exemple</u> : $E = \mathbb{R}^2$, $p(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$

$q(x) = p(x,x) = x_1^2 - x_2^2 \qquad (q(\lambda x) = \lambda^2 q(x))$

q est non dégénérée mais pas définie

$\ker(q) = \{0_E\}$ mais $\{x \mid q(x) = 0\} \neq \{0_E\}$

↳ <u>q n'est pas définie</u>

Il suffit de trouver $x \neq 0_E$ tel que $q(x) = 0$ $\quad (q(0_E) = 0)$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ conviennent

⚠ $q\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=0 \quad q\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=0 \quad q\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=-1\neq 0$

L'ensemble des vecteurs isotropes n'est pas un espace vectoriel !

↳ <u>q est non dégénérée</u>

$p(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$

Soit $x\in\ker q=\{x\in E \mid p(x,y)=0 \ \forall y\in E\}$

Montrons que $x=0_E$.

$$x\in\ker q \iff x_1y_1-x_2y_2=0 \ \forall y\in E$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-x_2=0 & \left(y=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) \\ x_1+x_2=0 & \left(y=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0\end{cases}$$

Comme $0_E\in\ker q$, on en déduit que $\ker q=\{0_E\}$

Formes quadratiques et positivité

Dans la suite, on prend $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et on s'intéresse au signe des formes quadratiques de E ($\mathbb{R}$-espace vectoriel) dans $\mathbb{R}$.

Déf : • $q\in Q(E)$ ($Q(E)$: $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes quadratiques) est dite (semi-définie) positive si $q(x)\geq 0 \ \forall x\in E$

• $q\in Q(E)$ est dite semi-définie négative si $q(x)\leq 0 \ \forall x\in E$

- $q \in Q(E)$ est dite définie positive

  si $q(x) > 0 \quad \forall x \in E, x \neq 0_E$

- $q \in Q(E)$ est dite définie négative

  si $q(x) < 0 \quad \forall x \in E, x \neq 0_E$

<u>Exemples</u> :

- $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = x^T x = x_1^2 + x_2^2$ définie positive
- $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2$ semi-définie négative

  $= -(x_1+x_2)^2 \leq 0$ nul en $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ ni semi-définie positive

  ni semi-définie négative

  (on dit parfois que q est indéfinie)

Par isomorphisme, on dit qu'une matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est semi-définie positive si c'est la matrice représentant une forme quadratique semi-définie positive dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

On note cela $M \succeq 0$ $\left(\neq M_{ij} \geq 0 \ \forall i,j \right)$

$\iff x^T M x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ | et <u>M symétrique</u> |

<u>Remarque</u> :

- $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas semi-définie positive

  $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad x^T M x = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 < 0$

. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est définie positive

càd $x^T M x > 0$ si $x \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x^T M x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$

$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

et $= 0$ ssi $x_1^2 = x_2^2 = 0$

$M \in S^n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid M^T = M\}$	$q \in \mathcal{Q}(E)$, M représente q dans la base canonique
$M \succeq 0$ (M semi-définie positive)	$q(x) \geq 0 \quad \forall x \in E$
$M \succ 0$ (M définie positive)	$q(x) > 0 \quad \forall x \in E, x \neq 0_E$
$M \preceq 0$ (M semi-définie négative)	$q(x) \leq 0 \quad \forall x \in E$
$M \prec 0$ (M définie négative)	$q(x) < 0 \quad \forall x \in E, x \neq 0_E$

$\longrightarrow$ Lorsque $n > 1$, il existe des matrices qui ne sont ni semi-définies positives ni semi-définies négatives

$\longrightarrow$ Pour toute dimension, il existe une infinité de matrices semi-définies positives et une infinité de matrices semi-définies négatives.

Application : Optimisation

. Si on cherche le minimum d'une forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et que

$q(x) = x^T M x$ avec $M \in S^n(\mathbb{R})$, alors

on sait que

* Si $M \succeq 0$, alors q a un minimum
* Si $M \succ 0$, l'unique minimum est 0
* Sinon q n'est pas de minimum

- Si on cherche le minimum d'une fonction quadratique c.à.d d'une fonction de la forme $f(x) = \underbrace{x^T M x}_{\text{forme quadratique}} + \underbrace{g^T x}_{\text{forme linéaire}} + h$

avec $M \in S^n(\mathbb{R})$, $g \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}$

* Si $M \succeq 0$, cette fonction a un minimum
* Si $M \succ 0$, ce minimum est unique

Ex) Régression linéaire

$$f(x) = \frac{1}{2m} x^T A^T A x - \frac{1}{m} b^T A x + \frac{1}{m} b^T b$$

entrées / attributs $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

sorties / labels $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$

But Trouver x tel que $Ax \simeq b$

Déf : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $q \in Q(E)$ une forme quadratique définie positive.

Alors (E, q) s'appelle un espace préhilbertien réel. Si $\dim(E) < +\infty$, on dit que (E, q) est un espace euclidien.

La forme polaire associée à q s'appelle alors un produit scalaire.