Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

7 novembre 2024

Début du second bloc du cours

Planning prévisionnel novembre

- Cette semaine : Formes quadratiques
- 14/11 - 15/11 : Formes quadratiques + correction partiel
- 21/11 - 22/11 : Formes quadratiques + CC (simple !)

FORMES QUADRATIQUES

1 Définitions

Def : Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

→ Une application $b : \begin{array}{l} E \times F \longrightarrow G \\ (x,y) \longmapsto b(x,y) \end{array}$ est dite bilinéaire si

. $\forall x \in E$, $b(x, \cdot) : \begin{array}{l} F \longrightarrow G \\ y \longmapsto b(x,y) \end{array}$ est une application linéaire de F dans G

Notation : 1re variable fixée
2e variable libre

. $\forall y \in F$, $b(\cdot, y) : \begin{array}{l} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto b(x,y) \end{array}$ est une application linéaire de E dans G

→ Lorsque $G = \mathbb{K}$, on dit que b est une forme bilinéaire

→ L'espace des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G est noté $\mathcal{L}(E, F; G)$. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Exemples : . Le produit dans $\mathbb{R}$: $\begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto xy \end{array}$ est une forme bilinéaire ($\in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}; \mathbb{R})$)

⚠ Le produit n'est pas linéaire : $(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 (xy)$

L'addition est linéaire $(\lambda x) + (\lambda y) = \lambda (x+y)$

. Le produit matriciel

$$p : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times q} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times q} \\ (A, B) \longmapsto AB \end{array}$$

est une application bilinéaire ($\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{R}^{n \times q}; \mathbb{R}^{m \times q})$)

NB : $(A,B) \longmapsto A$ est aussi bilinéaire

- Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

est une forme bilinéaire

Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$ $\quad b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est une forme bilinéaire

Définition : Soit $b \in \mathcal{L}(E, E; G)$ avec E, G $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

- On dit que b est symétrique si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad b(x,y) = b(y,x)$$

- On dit que b est antisymétrique si

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad b(x,y) = -b(y,x)$$

Ex). $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est antisymétrique.

$$(x,y) \longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$b(y,x) = y_1 x_2 - y_2 x_1$$
$$= -b(x,y)$$

- Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est symétrique.

Def : Soit $b \in \mathcal{L}(E,E;G)$ symétrique

- Le noyau de b est l'ensemble $\{x \in E \mid b(x,y)=0 \ \forall y \in E\}$
- On dit que b est non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0_E\}$
- Le noyau est noté $\ker(b)$

Représentation matricielle des formes bilinéaires

↳ De la même manière que les applications linéaires se représentent par des matrices, les formes bilinéaires se représentent par des matrices (Valable en dimension finie)

↳ Soit $b : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire avec E de dimension m et F de dimension n

Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de E
$(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F

Alors la représentation de b dans ces bases est la matrice $M \in \mathbb{K}^{m \times n}$ définie par

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad M_{ij} = b(e_i, f_j)$$

Proposition Si M est la représentation de $b \in \mathcal{L}(E,F;\mathbb{K})$ dans les bases $(e_1, \ldots, e_m)$ (de E) et $(f_1, \ldots, f_n)$ (de F), alors

$\forall x \in E, \forall y \in F,$

$$b(x,y) = \overbrace{\underbrace{X^T}_{1 \times m} \underbrace{M}_{m \times n} \underbrace{Y}_{n \times 1}}^{1 \times 1}$$

avec $X \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ la matrice des coordonnées de x dans la base $(e_1, \ldots, e_m)$

et $Y \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ la matrice des coordonnées de y dans la base $(f_1, \dots, f_m)$

Exemple important

Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ $\left(e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i \right)$

La représentation matricielle de b dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ (choisie 2 fois) est la matrice $M = \left[b(e_i, e_j) \right]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

k-ème coordonnée de e_i

Si $i \neq j$ $\quad b(e_i, e_j) = 0 = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(e_i)_k}_{\substack{=1 \text{ si } i=k \\ =0 \text{ sinon}}} \underbrace{(e_j)_k}_{\substack{=1 \text{ si } j=k \\ =0 \text{ sinon}}}$

$b(e_i, e_i) = \sum_{k=1}^{n} \left((e_i)_k\right)^2 = (e_i)_i^2 = 1$

$\Rightarrow M = I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

Pour tous $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$b(x, y) = X^T M Y = X^T Y$$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

En identifiant $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et la matrice $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$,

on peut alors écrire que

$$\boxed{b(x,y) = x^T y}$$

notation qui confond $x \in \mathbb{R}^n$ avec $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix}$

$$b(e_1, e_2) = \sum_{k=1}^{n} (e_1)_k (e_2)_k$$

$$= 1\times 0 + 0\times 1 + 0\times 0 + \dots + 0\times 0$$

$$= 0$$

NB : $x^T y = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n]$

Remarque : En pratique, on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les matrices de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ (idem pour $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^{n\times 1}$)

2 Formes quadratiques

Def : Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $q : E \to \mathbb{K}$.

On dit que q est une forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire $b \in \mathcal{L}(E, E ; \mathbb{K})$ telle que

$$\forall x \in E, \quad q(x) = b(x,x)$$

q s'appelle la forme quadratique associée à b.

→ Une forme bilinéaire définit une unique forme quadratique, mais l'inverse n'est pas vraie (une forme quadratique peut être associée à une infinité de formes bilinéaires)

Ex) $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1^2 + x_2^2$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad q(x) = b_1(x,x)$ avec $b_1(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $\quad q(x) = b_2(x,x)$ avec $b_2(x,y) = x_1(y_1+y_2) + x_2(y_2 - y_1)$

$$b_2(x,x) = x_1^2 + \cancel{x_1 x_2} + x_2^2 - \cancel{x_2 x_1} = x_1^2 + x_2^2 = q(x)$$

Th Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique.

Il existe une unique forme bilinéaire symétrique associée à q, que l'on appelle la forme polaire de q.

Preuve Par définition, si q est une forme quadratique, alors $\exists b \in \mathcal{L}(E, E; \mathbb{K})$ telle que $q(x) = b(x,x)$ $\forall x \in E$ (b n'est pas forcément symétrique)

Soit $c : E \times E \to \mathbb{K}$
$$(x,y) \mapsto \frac{1}{2}\big(b(x,y) + b(y,x)\big)$$

Alors $c \in \mathcal{L}(E, E; \mathbb{K})$ (qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)

De plus, c est symétrique

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad c(y,x) = \frac{1}{2}\big(b(y,x) + b(x,y)\big) = \frac{1}{2}\big(b(x,y) + b(y,x)\big) = c(x,y)$$

Enfin, $\forall x \in E$, $c(x,x) = \frac{1}{2}\big(b(x,x) + b(x,x)\big) = \frac{1}{2} \times 2\, b(x,x) = b(x,x) = q(x)$

et donc q est la forme quadratique associée à c.

On a donc montré qu'il existe toujours une forme bilinéaire symétrique dont q est la forme quadratique associée.

Pour montrer que cette forme bilinéaire est unique, on montre que c est déterminée par les valeurs de q de manière unique

On sait déjà que $c(x,x) = q(x)$. Plus généralement, on a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad c(x,y) = \frac{1}{4}\big(q(x+y) - q(x-y)\big)$$

En effet, $c(x,y) = \frac{1}{2}\big(b(x,y) + b(y,x)\big)$

et
$$\frac{1}{4}\big(q(x+y) - q(x-y)\big) \overset{\text{définition de } q}{=} \frac{1}{4}\big(b(x+y,x+y) - b(x-y,x-y)\big)$$

b bilinéaire

(linéaire par rapport au premier argument et par rapport au second)

$$= \frac{1}{4}\big(b(x,x+y) + b(y,x+y) - b(x,x-y) + b(y,x-y)\big)$$

$$= \frac{1}{4}\big(b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) - b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) - b(y,y)\big)$$

$$= \frac{1}{4}\big(2b(x,y) + 2b(y,x)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(b(x,y) + b(y,x)\big) = c(x,y)$$

Par conséquent, c est complètement déterminée (de manière unique) par les valeurs de q : il existe donc bien une unique forme bilinéaire symétrique telle que q est la forme quadratique associée.

FIN PREUVE