Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

18/10/2024

Aujourd'hui : TD 4

4.1.

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

a) M_α est-elle diagonalisable ?

<u>NB</u> : M_α est triangulaire donc trigonalisable.

Les valeurs propres de M_α sont $(1,1,1,1)$

Le polynôme caractéristique de M_α est $\chi_{M_\alpha}(X) = (X-1)^4$

Justification 1 : On sait que M_α diagonalisable $\Leftrightarrow$ le polynôme minimal de M_α est scindé à racines simples

Comme le polynôme minimal divise $\chi_{M_\alpha}(X)$, on en déduit que

M_α diagonalisable $\Leftrightarrow$ le polynôme minimal de M_α est $X-1$

$\Leftrightarrow M_\alpha - I = 0$

$\Leftrightarrow M_\alpha = I \Leftrightarrow \alpha = 0$

Justification 2

Si M est diagonalisable, alors M s'écrit $P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$ par définition, avec $P \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ inversible

On a donc $M = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = PP^{-1} = I_4$

Donc $M = I_4 \Leftrightarrow \alpha = 0$

b) Si M_α est la représentation de $u_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4), donner la représentation de u_α dans la base $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4)$

Il s'agit d'exprimer les coordonnées de $(M_\alpha e_1, M_\alpha(e_1+e_2), \ldots)$ dans la nouvelle base $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4)$

- $M_\alpha e_1 = e_1 + \alpha e_2$ (1ère colonne de M_α)

$= (1-\alpha)e_1 + \alpha e_1 + \alpha e_2$

$= (1-\alpha)e_1 + \alpha(e_1+e_2) \Rightarrow$ les coordonnées de $M_\alpha e_1$ dans la nouvelle base sont $\begin{bmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $M_\alpha(e_1+e_2) = M_\alpha e_1 + M_\alpha e_2$

$= e_1 + \alpha e_2 + e_2 + \alpha e_3$

$= (1-\alpha)e_1 + \alpha e_1 + \alpha e_2 + e_2 + \alpha e_3$

$= -\alpha e_1 + (e_1+e_2) + \alpha(e_1+e_2+e_3) \Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha \\ 1 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$

- $M_\alpha(e_1+e_2+e_3) = e_1 + \alpha e_2 + e_2 + \alpha e_3 + e_3 + \alpha e_4$

$= (1-\alpha)e_1 + \alpha e_1 + \alpha e_2 + e_2 + \alpha e_3 + e_3 + \alpha e_4$

$= -\alpha e_1 + (e_1+e_2+e_3) + \alpha(e_1+e_2+e_3+e_4) \Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$

- $M_\alpha(e_1+e_2+e_3+e_4) = e_1 + \alpha e_2 + e_2 + \alpha e_3 + e_3 + \overbrace{\alpha e_4 + e_4}^{(1+\alpha)e_4}$

$= -\alpha e_1 + (1+\alpha)e_1 + (1+\alpha)e_2 + (1+\alpha)e_3 + (1+\alpha)e_4$

$= -\alpha e_1 + (1+\alpha)(e_1+e_2+e_3+e_4) \Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 1+\alpha \end{bmatrix}$

Conclusion : La représentation de u_α dans la nouvelle base est

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}$$

($\alpha = 0$: on retrouve I_4)

Exercice 4.2

a) Trouver toutes les matrices $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tq $M^2 = I_3$

$M^2 = I_3 \iff X^2 - 1$ est annulateur de M

$X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ scindé à racines simples

↳ X^2-1 n'est pas le polynôme caractéristique de M (car celui-ci est de degré 3)

↳ Le polynôme minimal de M divise X^2-1 : c'est donc

soit $X-1$, soit $X+1$, soit $(X-1)(X+1)$

Dans tous les cas, le polynôme minimal est scindé à racines simples et M est donc diagonalisable

. Si le polynôme minimal est $X-1$:

$$M - I_3 = 0 \iff M = I_3$$

. Si le polynôme minimal est $X+1$:

$$M + I_3 = 0 \iff M = -I_3$$

. Si le polynôme minimal est $(X-1)(X+1)$

Alors $M = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec P inversible

$\lambda_i \in \{-1, +1\}$ $\forall i$

Sans perte de généralité dans $\mathbb{R}^n$ on peut ordonner les valeurs propres en diagonalisant ou en trigonalisant

Au moins 2 valeurs propres distinctes et les 3 valeurs propres ne sont pas identiques

et l'ensemble des valeurs propres est soit égal à $\{-1,-1,1\}$ soit égal à $\{-1,1,1\}$

Soit $M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$, soit $M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-2}$

comme avant le

cas $P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Si $M = \overbrace{\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}}^{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} P^{-1}$

$\bar{P} = [p_1 \; p_3 \; p_2]$ $\qquad M = \bar{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{P}^{-1}$

<u>Bilan</u> : $M^2 = I_3 \implies \Big[\, M = I_3$ ou $M = -I_3$ ou $M = P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$ avec P inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

ou $M = P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} \Big]$

La réciproque est vraie, il y a donc équivalence et on a donc caractérisé toutes les matrices telles que $M^2 = I_3$

b) $M^2 = M$ $\qquad$ (Parenthèse : Matrice de projection)

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M^2 - M = 0 \iff X^2 - X = X(X-1)$ annulateur de M

$\iff$ Le polynôme minimal est soit X, soit $X-1$, soit $X(X-1)$

Si on note π_M le polynôme minimal, on a alors :

- $\pi_M(X) = X \iff M = 0_{\mathbb{R}^{3\times 3}}$

- $\pi_M(X) = X - 1 \iff M = I_3$

- $\pi_M(X) = X(X-1) \iff M$ est diagonalisable et s'écrit donc

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } P \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ inversible}$$

et l'ensemble $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ est soit égal à $\{0, 0, 1\}$, soit à $\{0, 1, 1\}$

Conc :

$$M^2 = M \iff \left[M = 0_{\mathbb{R}^{3\times 3}} \text{ ou } M = I_3 \text{ ou } M = P \begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} P^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible} \right.$$
$$\left. \text{ou } M = P \begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} P^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible} \right]$$

c) $M^2 = 0_{\mathbb{R}^{3\times 3}}$

X^2 est annulateur de $M \implies \pi_M(X) = X$ ou $\pi_M(X) = X^2$

Si $\pi_M(X) = X$, alors M est la matrice nulle

Si $\pi_M(X) = X^2$, M n'est pas diagonalisable mais elle est nilpotente d'indice 2 ($M^2 = 0$ mais $M \neq 0$)

Il existe alors une matrice inversible P telle que

$$M = \underbrace{P \begin{bmatrix} J_2 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & J_2 & & & \\ & & & J_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & J_1 \end{bmatrix} P^{-1}}_{\text{diagonale par blocs}} \qquad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_1 = [0]$$

M nilpotent d'indice k $\in \mathbb{C}^{n\times n}$

$\iff \exists P,$

$$M = P \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccccc} k & k & k-1 & & 1 & 1 \end{array}}^{n} \\ \begin{pmatrix} J_k & & & & & \\ & J_k & & & & \\ & & J_{k-1} & & & \\ & & & J_{k-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & J_1 & \\ & & & & & J_1 \end{pmatrix} \end{array} P^{-1}$$

- Il y a $m_2 \geq 1$ blocs J_2
- Il y a $m_1 \geq 0$ blocs J_1 avec $2m_2 + m_1 = 3$

Comme on doit avoir un bloc de taille 2 (J_2), on en conclut que $m_2 = 1$ et $m_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} J_2 & & & \\ & J_2 & & \\ & & J_1 & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Au moins un bloc } J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ nécessairement un bloc J_1 et pas de bloc J_2

On en conclut que

$$M = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 4.5

Soit $M \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ telle que

$$\chi_M(X) = (X+3)^4 (X-2)^2 \quad \text{(polynôme caractéristique)}$$

Donner les valeurs possibles du polynôme minimal et les structures de Jordan associées

Le polynôme minimal π_M divise χ_M

Donc $\pi_M(X) = (X+3)^a (X-2)^b$ avec $a \in \{1,2,3,4\}$ et $b \in \{1,2\}$

Pour chaque couple (a,b), on peut caractériser les formes de Jordan possible

Ex : $a=1$, $b=1$ $\quad \pi_M(X) = (X+3)(X-2)$ $\Rightarrow$ Scindé à racines simples

$$M = P \left[\begin{array}{cccc|cc} -3 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -3 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & -3 & & \\ \hline & 0 & & & 2 & 0 \\ & & & & 0 & 2 \end{array}\right] P^{-1}$$

diagonalisable (les valeurs propres sont ordonnées sans perte de généralité)

~~Correspond~~ Correspond au sous-espace caractéristique $\ker(M+3I_6)^4$

(sous-espace propre $\ker(M+3I_6)$)

Forme de Jordan $\left[\begin{array}{cccc|cc} -3 & & & & & \\ & -3 & & & & \\ & & -3 & & & \\ & & & -3 & & \\ \hline & & & & 2 & 0 \\ & & & & 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} -3I_4 + \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & J_1 & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 2I_2 + \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix} \end{array}\right]$

Ex) $a=4$ $b=2$

$$\Pi_M(X) = \chi_M(X) = (X+3)^4(X-2)^2$$

La matrice M n'est pas diagonalisable mais elle s'écrit

Forme de Jordan $\left(\quad P \left[\begin{array}{c|c} -3I_4 + N_4 & 0 \\ \hline 0 & 2I_2 + N_2 \end{array}\right] P^{-1} \right.$

avec $N_4 \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ nilpotente d'indice 4

et $N_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ nilpotente d'indice 2

En utilisant les propriétés des matrices nilpotentes, on sait que ces matrices sont semblables à $J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ pour N_4

et $J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pour N_2

Il existe donc une matrice $Q \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ telle que

$$M = Q \left[\begin{array}{cccc|cc} -3 & 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & -3 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & -3 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & -3 & & \\ \hline & & & & 2 & 0 \\ & & & & 1 & 2 \end{array}\right] Q^{-1}$$

↳ Cas général $M = P \left[\begin{array}{c|c} -3I_4 + N_a & 0 \\ \hline 0 & 2I_2 + N_b \end{array}\right] P^{-1}$ avec $N_a \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ nilpotente d'indice a

et $N_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ nilpotente d'indice b

Ex 4.3.

$\forall M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$ $\left(= I_n + M + \frac{M^2}{2} + \frac{M^3}{6} + \dots\right)$

a) M diagonalisable

$\exists P$ inversible, $M = P \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}} P^{-1}$

Λ

Λ

i) Formule pour M^k

$M^k = M \times M \times \dots \times M = P \Lambda \underbrace{P^{-1} P}_{I_n} \Lambda P^{-1} \dots P \Lambda P^{-1} = P \Lambda^k P^{-1}$

$= P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$

ii) Formule pour $\exp(M)$

$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P \Lambda^k P^{-1}}{k!}$ $\left(= \overset{P\Lambda^0 P^{-1}}{\overset{\shortparallel}{I_n}} + P\Lambda P^{-1} + \frac{P\Lambda^2 P^{-1}}{2} + \dots \right.$

$= P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} \right) P^{-1}$

$= P e^{\Lambda} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}$

b) $M = D + N$, D diagonalisable, N nilpotente d'indice 2 $\quad DN = ND$

i) Formule pour M^k

$(D+N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j N^{k-j}$ (vrai parce que $DN = ND$)

N nilpotente d'ordre 2 $\Rightarrow \binom{k}{j} D^j N^{k-j} = 0$ si $k - j \geq 2$

tous les termes de la somme sont nuls sauf les deux derniers

$(D+N)^k = \binom{k}{k-1} D^{k-1} N + \binom{k}{k} D^k N^0$

$= k D^{k-1} N + D^k$ si $k \geq 1$

si $k = 0$ $(D+N)^0 = I$

ii) Formule pour $\exp(M)$

$$\exp(M) = \exp(D+N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D+N)^k}{k!}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kD^{k-1}N + D^k}{k!}\right) + I$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kD^{k-1}N}{k!}\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\right) + I \qquad I = \frac{D^0}{0!}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kD^{k-1}N}{k!}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}$$

$\forall k \geq 1,$

$$\frac{kD^{k-1}N}{k!} = \frac{D^{k-1}N}{(k-1)!}$$

$k! = k \times (k-1) \times \dots \times 1$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{k-1}N}{(k-1)!} + \exp(D)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k N}{k!} + \exp(D)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\right) N + \exp(D)$$

$$= \exp(D)N + \exp(D)$$

Si $D = P \Lambda P^{-1}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} (I + N)$$