Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

17 octobre 2024

Aujourd'hui : Fin TD 3 + Fin cours réduction

Demain : Séance de révisions

29 octobre 2024 : Partiel, 1h30

Autorisée : 1 feuille A4 recto-verso de notes

Fin TD 3

Exercice 3.4: Espaces de Krylov

Soit une matrice $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. On considère son polynôme caractéristique $\chi_{\boldsymbol{M}}(X) = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n$. $a_n = (-1)^n$

a) Étant donné un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$, que vaut $\chi_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{v}$? $\rightarrow 0_{\mathbb{C}^n}$

b) On suppose que $\boldsymbol{M}$ est inversible. Exprimer alors l'inverse de $\boldsymbol{M}$, notée $\boldsymbol{M}^{-1}$, comme un polynôme en $\boldsymbol{M}$.

c) En déduire une expression de $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{v}$, où $\boldsymbol{v}$ est le vecteur de la question a). $\rightarrow$ Si $M^{-1} = P(M)$, alors $M^{-1}v = P(M)v$

d) Les résultats précédents sont souvent utilisés dans le cadre des sous-espaces de Krylov. Étant donnés $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{v}$, le k-ième sous-espace de Krylov est défini comme le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, k) = \text{vect}\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{M}^{k-1}\boldsymbol{v}\right). \tag{1}$$

i) Justifier que $\mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, k) = \mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, n)$ pour tout $k \geq n$.

ii) Supposons que $\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de $\boldsymbol{M}$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Quelle propriété cela implique-t-il sur les espaces de Krylov ?

iii) Lorsque $\boldsymbol{M}$ est inversible et possède n valeur propres distinctes, donner une condition pour que $\mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, n) = \mathbb{C}^n$.

d) i) $K(M, v, n) = \text{vect}(v, Mv, \dots, M^{n-1}v)$

$\forall k \geq n$, $K(M, v, k) = \text{vect}\underbrace{(v, Mv, \dots, M^{n-1}v, M^n v, \dots, M^{k-1}v)}_{\text{famille de } k \geq n \text{ vecteurs liée lorsque } k > n}$

$\forall k > n$, $M^{k-1}v$ est combinaison linéaire de $v, Mv, \dots, M^{n-1}v$

Donc $M^{k-1}v \in \text{vect}(v, Mv, \dots, M^{n-1}v) = K(M, v, n)$

ii) Si v est vecteur propre de M associé à $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $Mv = \lambda v$ (et $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$)

$K(M, v, 1) = \text{vect}(v)$

$K(M, v, 2) = \text{vect}(v, Mv) = \text{vect}(v, \lambda v) = \text{vect}(v)$

Par récurrence, on obtient que

$K(M, v, k) = K(M, v, 1) = \text{vect}(v) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

Si $K(M, v, k) = \mathrm{vect}(v) = \mathrm{vect}(v, \lambda v, \lambda^2 v, \dots, \lambda^{k-1} v)$

alors $K(M, v, k+1) = \mathrm{vect}(v, Mv, M^2 v, \dots, M^k v)$

$= \mathrm{vect}(v, \lambda v, \lambda^2 v, \dots, \lambda^{k-1} v, \lambda^k v)$

$= \mathrm{vect}(v)$

Induction

$K(M, v, k+1) = K(M, v, k) + \mathrm{vect}(M^k v)$

$= \mathrm{vect}(v) + \mathrm{vect}(\lambda^k v) = \mathrm{vect}(v)$

iii) M inversible et possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

On a donc
$$M = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$M p_i = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1} p_i$$

avec $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible dont les colonnes $P = [p_1 \cdots p_n]$ forment une base de vecteurs propres

$$P^{-1} p_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \in \mathbb{C}^n$$

$\forall i = 1..n, \quad M p_i = \lambda_i p_i$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1} p_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1} p_i = \underbrace{[p_1 \cdots p_n]}_{n \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{n \times 1} = \underbrace{\lambda_i p_i}_{n \times 1}$$

Soit $v \in \mathbb{C}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$ avec $\alpha_i \neq 0$ $\forall i = 1..n$

alors $K(M, v, n) = \mathrm{vect}(v, Mv, \dots, M^{n-1} v)$

$$= \mathrm{vect}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M p_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M^{n-1} p_i\right)$$

$$= \mathrm{vect}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i p_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{n-1} \alpha_i p_i\right)$$

Pour que $K(M, v, n)$ soit égal à $\mathbb{C}^n$, il faut que les n vecteurs $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{n-1} \alpha_i p_i$ soient linéairement indépendants. Réponse

(càd que si $\sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{j-1} \alpha_i p_i \right) = 0$, alors $\beta_j = 0 \ \forall j$)

Si $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\alpha_i = 0$, alors on ne peut pas avoir $K(M, v, n) = \mathbb{C}^n$

Supposons (sans perte de généralité) que $v = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i p_i$ avec $\alpha_i \neq 0$

(v n'a pas de composante selon p_n)

Dans ce cas,
$$K(M, v, n) = \text{vect}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i p_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{n-1} \alpha_i p_i \right)$$
$$\subseteq \text{vect}(p_1, \ldots, p_{n-1}) \subsetneq \mathbb{C}^n$$

Cours : Forme de Jordan

↳ E $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim(E) = n$

↳ Soit $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ nilpotente d'indice $p \in \{1, \dots, n\}$ $\left(M^p = 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}, \ M^{p-1} \neq 0_{\mathbb{K}^{n\times n}} \right)$

On a vu que dans ce cas il existe une matrice inversible $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ telle que

$$M = Q \begin{bmatrix} J_p & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_p & & & & \\ & & & J_{p-1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & J_{p-1} & \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & J_1 \ \dots \ J_1 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

Matrice diagonale par blocs

où $\forall k \in \{1, \dots, p\}$

$$J_k = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & \ddots\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

$$J_1 = [0] \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

où chaque bloc J_k apparaît $\underbrace{m_k}_{\in \mathbb{N}}$ fois et $\sum_{k=1}^{p} k \times m_k = n$

$\Rightarrow$ ces blocs correspondent à des bases des noyaux de $M, M^2, \dots, M^{p-1}$

$$\left(m_k = 2\dim(\ker M^k) - \dim(\ker M^{k-1}) - \dim(\ker M^{k+1}) \right)$$

Généralisation à une matrice quelconque

↳ On se place dans $\mathbb{C}^{n\times n}$ pour simplifier

↳ $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ quelconque a n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (racines complexes du polynôme caractéristique)

$\Rightarrow$ Il existe une base de $\mathbb{C}^n$, $Q_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que $Q_i^{-1} M Q_i = \left[\begin{array}{c|c} M_i & A_i \\ \hline B_i & C_i \end{array}\right]$

$M_i - \lambda_i I_{m_i}$ est nilpotente d'indice p_i avec p_i l'ordre de multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal de M.

et m_i est la dimension du sous-espace caractéristique associé à λ_i

$\ker\left((M-\lambda_i I_n)^{m_i}\right)$ m_i ordre de multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal

Théorème (Forme de Jordan)

Pour toute matrice $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, il existe une base de $\mathbb{C}^n$, càd une matrice inversible $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que

$$M = Q \underbrace{\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_n(\lambda_n) \end{bmatrix}}_{\text{diagonale par blocs}} Q^{-1}$$

, où les $J_i(\lambda_i)$ s'appellent des blocs de Jordan

et

$$J_i(\lambda_i) = \lambda_i I + \begin{bmatrix} J_{p_i} & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{p_i} & & & & \\ & & & J_{p_i-1} & & & \\ & & & & \ddots \; J_{p_i-1} & & \\ & 0 & & & & \ddots \; J_1 & \\ & & & & & & J_1 \end{bmatrix}$$

p_i : défini par le sous-espace caractéristique associé à λ_i

J_k défini comme auparavant

NB : La forme de Jordan conduit à une matrice triangulaire mais diagonale par blocs et avec au plus 2 coefficients non nuls par colonne

En termes d'endomorphisme, le résultat précédent s'appelle la décomposition de Dunford.

Théorème Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Alors, $u = v + d$, où $v \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme

nilpotent et $d \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme diagonalisable.
avec $v \circ d = d \circ v$

Principe :

- $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{\ker\left((u - \lambda_i \, id_E)^{m_i}\right)}_{N_{\lambda_i}}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valeurs propres distinctes de u

- m_i : ordre de multiplicité de λ_i dans χ_u

Restriction de u à N_{λ_i}
$u_{|N_{\lambda_i}} : N_{\lambda_i} \to N_{\lambda_i}$, $x \mapsto u(x)$

- $v_i = u_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \, id_{N_{\lambda_i}}$ est un endomorphisme nilpotent d'indice p_i, où p_i est l'ordre de multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal de u

- On pose ensuite $v : E \to E$

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i \longmapsto \sum_{i=1}^{k} v_i(x_i)$$
$x_i \in N_{\lambda_i} \ \forall i$

et $d = u - v$