Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

11 octobre 2024

Aujourd'hui : Forme de Jordan
Fin TD 3

Théorème : Soit E $\mathbb{K}$-ev, $v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre n.

Si et seulement si : il existe une base de E dans laquelle v est représenté par la matrice

"Matrice de Jordan de taille n" $\rightarrow$ $J_n = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad [J_n]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Démo

$(\Rightarrow)$ Supposons que v est nilpotent d'ordre n.

Par définition, on a $v^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $v^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

Il existe donc $x \in E$ tel que $v^{n-1}(x) \neq 0_E$, et on a alors nécessairement $x \neq 0_E$, $v(x) \neq 0_E$, $\dots$, $v^{n-1}(x) \neq 0_E$

Par conséquent, on considère la famille $(x, v(x), v^2(x), \dots, v^{n-1}(x))$

Cette famille est libre

En effet, $\forall (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$(*) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v^i(x) = 0_E \qquad (\text{avec } v^0(x) = id_E(x) = x)$$

on a

$$v^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v^i(x)\right) = 0_E$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v^{n-1}\left(v^i(x)\right) = 0_E$$

$$(1) \quad \alpha_0 v^{n-1}(x) + \alpha_1 v^n(x) + \alpha_2 v^{n+1}(x) + \dots + \alpha_{n-1} v^{2n-2}(x) = 0_E$$

Comme $v^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a $v^n(x) = v^{n+1}(x) = \dots = v^{2n-2}(x) = 0_E$

$$(v^{n+k} = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \forall k \in \mathbb{N})$$

et donc $(1) \iff \alpha_0 v^{n-1}(x) = 0_E$

Comme $v^{n-1}(x) \neq 0_E$ par hypothèse, on en conclut que $\alpha_0 = 0$

On peut ainsi montrer par récurrence que $\alpha_i = 0 \ \forall i$
(en appliquant v^{n-t} à $(*)$, on obtient que $\alpha_{t-1} = 0$)

donc la famille $(x, v(x), \dots, v^{n-1}(x))$ est libre.

Comme $\dim(E) = n$, c'est une base.

La matrice qui représente v dans la base $(x, v(x), \dots, v^{n-1}(x))$ est

coordonnées de $v(v^{n-1}(x)) = v^n(x) = 0_E$

$$J_n = \begin{array}{c} x \\ v(x) \\ v^2(x) \\ \vdots \\ v^{n-1}(x) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

coordonnées de l'image de x dans la base $(x, v(x), \dots, v^{n-1}(x))$

coordonnées de $v(v^{n-2}(x)) = v^{n-1}(x)$

$(\Longleftarrow)$ Il suffit de vérifier que $(J_n)^{n-1} \neq 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}$ et $(J_n)^n = 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}$

On obtient $(J_n)^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & 0 & \\ 0 & & \\ 1 & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad (J_n)^n = (J_n)^{n-1} J_n = 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}$

$n = 3$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ (J_3)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(J_3)^3 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$n=4$

$$J_4 = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \qquad (J_4)^2 = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix} \qquad (J_4)^3 = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

Déf : En dimension n, J_n s'appelle la matrice de Jordan de taille n.

En dimension n, $\forall p \in [\![1,n]\!]$, on parle de $J_p \in \mathbb{K}^{p\times p}$ comme du <u>bloc de Jordan</u> de taille p.

<u>Remarque</u> : E $\mathbb{K}$-ev, $\dim(E)=n$

Si v se représente par la matrice

$$(J_n)^{n+1-p} = \begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&0&&\vdots\\ 1&&\ddots&\vdots\\ 0&\ddots&1&0\end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $(p-1)$ème sous diagonale

, alors v est nilpotent d'indice p.

$p=2$ $\quad (J_n)^{n-1} = \begin{bmatrix}0&&0\\ \vdots&&\\ 0&&\\ 1&0&\cdots&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ On préfèrera la représentation par bloc

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{p} & \overleftrightarrow{n-p} \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} J_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

qu'on appellera la réduction de Jordan ou la forme de Jordan de cet endomorphisme.

Théorème : Forme de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

Soit E $\mathbb{K}$-ev de dimension n

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p \in [\![1, n]\!]$.

Alors, il existe une base de E telle que la matrice de v dans cette base est de la forme

$$J(v) = \begin{bmatrix} \overbrace{J_p \ \ddots \ J_p}^{\nu_p \times p} & & & & & 0 \\ & \overbrace{J_{p-1} \ \ddots \ J_{p-1}}^{\nu_{p-1} \times (p-1)} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & & \overbrace{J_1 \ \ddots \ J_1}^{\nu_1 \times 1} & \end{bmatrix}$$

càd que $J(v)$ est une matrice diagonale par blocs, où les blocs sont des blocs de Jordan $\left(J_1 = [0],\ J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \dots\right)$ et chaque bloc J_k apparaît ν_k fois, avec

$$0 \leq \nu_k = 2 \delta_k - \delta_{k+1} - \delta_{k-1} \quad , \quad \delta_k = \dim(\ker v^k)$$

ν_k peut être nul pour $k < p$

Ex) Si v est nilpotent d'indice n, alors $J(v) = J_n = [J_n]$

$$\nu_n = 1 \qquad \nu_{n-1} = \nu_{n-2} = \dots = \nu_1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{c|c} J_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \nu_p = 1 \qquad \nu_{p-1} = \dots = \nu_2 = 0 \qquad \nu_1 = n - p$$

$$\begin{bmatrix} J_p & & & & 0 \\ & [0] & & & \\ & & [0] & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & [0] \end{bmatrix} \to J_1$$

$$\cdot \begin{bmatrix} J_p & 0 \\ 0 & J_p \end{bmatrix} \quad \nu_p = 2 \quad \nu_{p-1} = \dots = \nu_1 = 0$$

$$\cdot\, n = 4 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Possibilités pour $n=4$

$$p = 4 \quad \begin{bmatrix} J_4 \end{bmatrix} \qquad p = 3 \quad \left[\begin{array}{c|c} J_3 & 0 \\ \hline 0 & J_1 \end{array}\right]$$

$$p = 2 \quad \left[\begin{array}{c|c} J_2 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c|c} J_2 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{matrix} \end{array}\right]$$

$$\nu_2 = 2 \quad \nu_1 = 0 \qquad \nu_2 = 1 \quad \nu_1 = 2$$

$$p = 1 \quad \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_1 & & \\ & & J_1 & \\ 0 & & & J_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ En pratique, la forme de Jordan se calcule via la suite

$\{f_k\}_{k=0..p}$ $\quad f_k = \dim(\ker v^k)$

$\left.\begin{matrix} f_p = n \\ f_{p-1} < n \end{matrix}\right\}$ car v nilpotent d'indice p

$f_0 = 0 \quad v^0 = id_E$

La suite f_k est croissante et les valeurs de cette suite déterminent la forme de Jordan. Plus n est grand, plus il y a de formes de Jordan possibles pour $1 < p < n$

Esquisse de démonstration

- $p=1$: $v = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc évident $\quad n$ blocs $J_1 = [0]$

$$J(v) = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_1 \end{bmatrix} = [0]$$

$$d_0 = 0$$

$$d_1 = n \quad d_2 = n \qquad \nu_1 = 2d_1 - d_0 - d_2 = 2n - 0 - n = n$$

- $p \geq 2$ $(\Rightarrow n \geq 2)$

On pose $\boxed{F_k = \ker v^k}$ $\forall k \in [\![0, p]\!]$ $\quad \{0, 1, \ldots, p\}$

$\dim(F_k) = d_k \qquad k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq p$

Alors $F_0 = \{0\}$, $F_p = E$ et on montre que (F_k) est strictement croissante $F_k \subsetneq F_{k+1}$ (découle du caractère nilpotent de v)

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on définit G_k tel que

$$G_k \oplus F_{p-k} = F_{p-k+1}$$

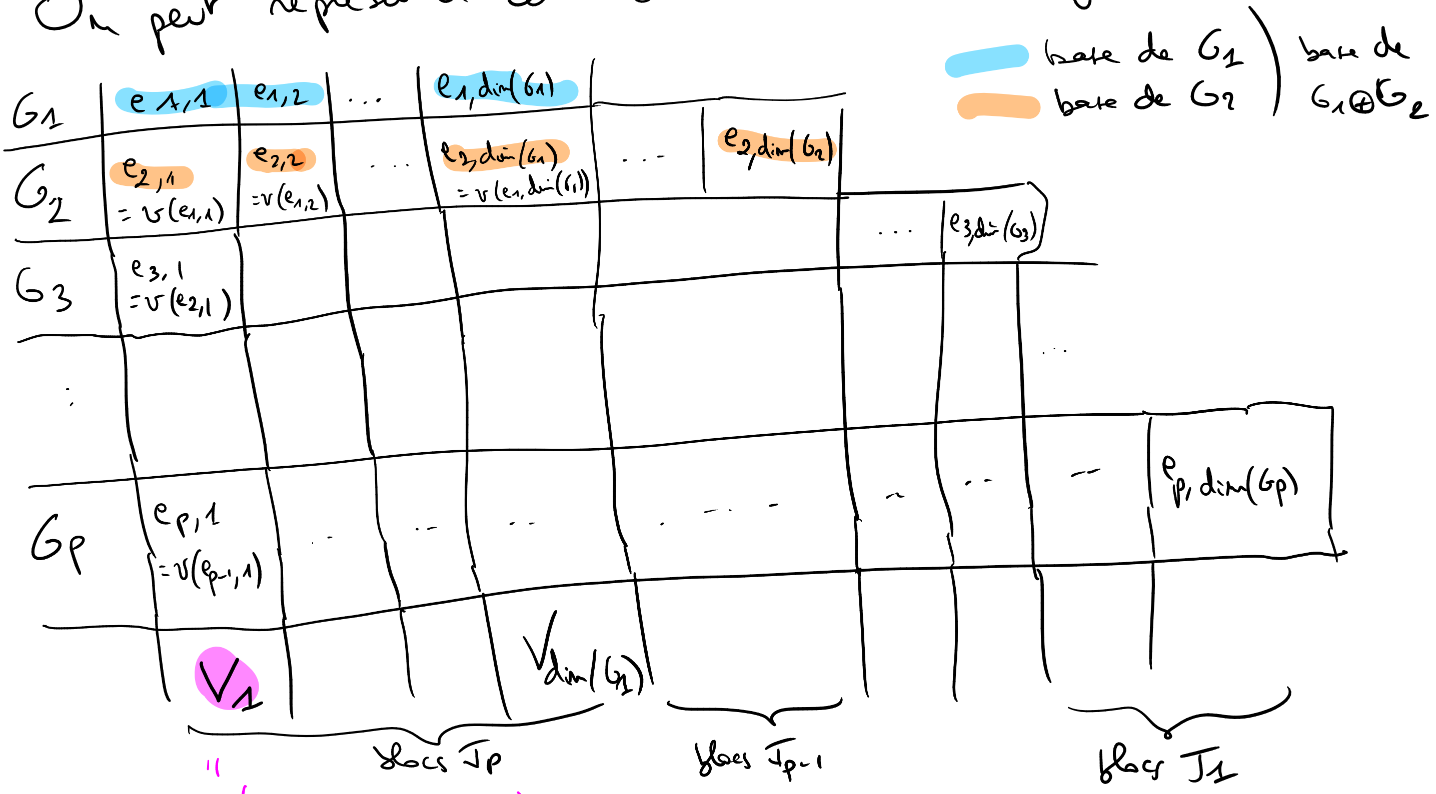
Idée : On cherche une base de E que l'on veut construire à partir de bases des F_k de manière progressive.

On a alors $E = \bigoplus_{k=1}^{p} G_k$, $\dim(G_k) = d_{p-k+1} - d_{p-k}$

et on peut choisir G_k tels que $v(G_k) \subseteq G_{k+1}$

$\rightarrow$ On peut alors construire une base de E à partir d'une base de G_1, d'une base de G_2 qui contient l'image des vecteurs de la base de G_1, d'une base de G_3 qui contient l'image des vecteurs de la base de G_2, ...

On peut représenter cette construction sous la forme d'un tableau



$= \text{vect}(e_{1,1}, \dots, e_{p-1,1})$

$= \text{vect}(e_{1,1}, v(e_{1,1}), \dots, v^{p-1}(e_{1,1}))$

sous-espace de E dimension p

la matrice de $v|_{V_1}$ s'écrit dans la base $(e_{1,1}, \dots, e_{p-1,1})$ J_p