Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

10/10/2024

Cette semaine:

Fin cours réduction des endomorphismes

Fin TD 3

Vers la décomposition de Jordan → Camille Jordan

<u>Motivation</u> : Toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé (sur le corps $\mathbb{K}$ concerné) est trigonalisable

$$\exists P \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ inversible}, \quad M = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

⟹ Cette décomposition peut être raffinée en considérant non pas les multiplicités géométriques des valeurs propres (dimensions des sous-espaces propres) mais les multiplicités algébriques

⟹ Dans certains cas (typiquement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on pourra montrer que M est semblable à une matrice diagonale par blocs

$$M = P \begin{bmatrix} N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_k \end{bmatrix} P^{-1}$$

N_j : matrices carrées triangulaires (soit toutes triangulaires supérieures, soit toutes triangulaires inférieures)

1) Noyaux et nilpotents

Soit E $\mathbb{K}$-ev, $\dim(E) = n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ représentation de u dans une base, χ_u / χ_M scindé sur $\mathbb{K}$

nb de valeurs propres distinctes

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{m_i}$$

valeur propre de u

multiplicité algébrique de λ_i

<u>Définition</u>

Le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i est le sous-espace

$$N_{\lambda_i} = \ker\left((u - \lambda_i \, id_E)^{m_i} \right)$$

⚠ Sous-espace propre : $\ker(u-\lambda_i \, id_E)$: Différent du sous-espace caractéristique en général lorsque $m_i \neq 1$

$m_i \geq \underbrace{\dim(\ker(u-\lambda_i \, id_E))}_{\text{multiplicité géométrique}} \geq 1$

Théorème : i) $E = \bigoplus_{i=1}^{k} N_{\lambda_i}$

ii) Les N_{λ_i} sont stables par u et $\dim(N_{\lambda_i}) = m_i$

iii) $N_{\lambda_i} = \ker((u-\lambda_i \, id_E)^{l_i})$ avec l_i l'ordre de multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal de u.

→ Ce théorème suggère que l'on peut exprimer u dans une base formée par des bases de N_{λ_i} (comme on l'a fait précédemment avec les sous-espaces propres). Reste à montrer que la matrice de u dans cette base possède une structure particulière (dans notre cas, une structure diagonale par blocs)

Ex) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 0 valeur propre double $\chi_M(X) = X^2$

$N_0 = \ker u^2$ dim 2

$= \ker((u-0 \, id_E)^2)$

Polynôme minimal de M/u X

$N_0 = \ker u$

Cas particulier d'une matrice nilpotente

Définition : Un endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$

(càd que X^q est annulateur de v)

Le plus petit entier non nul p tel que $v^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $v^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ s'appelle l'indice de nilpotence de v, et on a $1 \leq p \leq n$

Remarques : • On dit que $0_{\mathcal{L}(E)}$ est nilpotent d'indice 1 $(v^0 = id_E)$

• Par analogie, on dit que $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est nilpotente d'indice p si $M^p = 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}$ et $M^{p-1} \neq 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}$

$0_{\mathcal{L}(E)} : x \longmapsto 0_E$ $\qquad$ $0_{\mathbb{K}^{n\times n}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Propriétés des endomorphismes nilpotents

i. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

Alors, $\forall x \in E$ tel que $v^{p-1}(x) \neq 0_E$, la famille $(x, v(x), \dots, v^{p-1}(x))$ est libre

ii. $[v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p] \iff [\chi_v(X) = (-1)^n X^{\overset{\dim(E)}{\uparrow}n}$ et $\pi_v(X) = X^p]$

polynôme minimal de v

$[v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent$] \iff \chi_v(X) = (-1)^n X^n$

iii. $[v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p] \implies v$ est trigonalisable et toute représentation matricielle triangulaire de v possède une diagonale nulle

$[v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent$] \iff v$ trigonalisable et $[\dots]$

Démo (ii)

$(\Rightarrow)$ Si v est nilpotent d'indice p, alors par définition

$v^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc X^p est annulateur de v

$v^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc X^{p-1} n'est pas annulateur de v

Par conséquent, toute valeur propre de v est racine de X^p donc nulle $\Longleftrightarrow$ χ_v n'a que des racines nulles

Comme χ_v est de degré n de terme de plus haut degré $(-1)^n X^n$, on en conclut que $\chi_v(X) = (-1)^n X^n$

$\forall M$ matrice représentative de v, $\chi_v(X) = \det(M - X I_n)$

Le polynôme minimal de v divise tout polynôme annulateur et c'est le polynôme annulateur de v unitaire de plus faible degré.

$\Rightarrow$ Π_v divise X^p

$\Rightarrow$ Π_v s'écrit $\Pi_v(X) = X^{p'}$ avec $1 \leq p' \leq p$.

Montrons par l'absurde que $p = p'$.

Supposons $p' < p$. Comme $\Pi_v(v) = v^{p'} = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors on a aussi

$p-1-p' \geq 0$

$$\underbrace{v^{p-1-p'} \circ v^{p'}}_{v^{p-1}} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

donc $v^{p-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$, ce qui est absurde car $v^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ par hypothèse

On en conclut que $p' = p$, càd $\Pi_v(X) = X^p$.

$(\Leftarrow)$ Si $\chi_v(X) = (-1)^n X^n$ et $\Pi_v(X) = X^p$

Alors $v^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ $(= \Pi_v(v))$

et $v^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ (sinon X^{p-1} serait annulateur, ce qui contredirait la minimalité de Π_v)

Théorème : (E $\mathbb{K}$-ev, $\dim(E) = n$)

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.

[v nilpotent d'indice n] $\Leftrightarrow$ [il existe une base de E dans laquelle la matrice de v s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
]

NB : le théorème s'applique aussi avec la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

Déf : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice de Jordan nilpotente d'indice n est définie par

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$$J_n = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $J_n^n = 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}$ et $(J_n)^{n-1} \neq 0_{\mathbb{K}^{n\times n}}$

NB : $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ nilpotent d'indice 2

$\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \; 0 \end{pmatrix}$ ——— 3

⋮

J_n ——— n