Feuille d'exercices 7 : Matrices orthogonales

Algèbre linéaire et applications aux sciences des données, DL2 IASO

Version 2, décembre 2024

Exercice 7.1: Deux sous-espaces

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice. On note $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ les lignes de $\boldsymbol{A}$ en tant que vecteurs de $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire qu'on a

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

a) Montrer que $\mathrm{vect}(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m)$ et $\ker(\boldsymbol{A})$ sont des sous-espaces orthogonaux.

b) Quelle propriété vue en cours vient-on de redémontrer ?

Exercice 7.2: Matrices de projection

Soient les matrices $\boldsymbol{Q}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ et $\boldsymbol{Q}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Les matrices $\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{Q}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3$ et $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1$ sont-elle orthogonales ?

b) Calculer la projection du vecteur $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ sur $\mathrm{vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

Exercice 7.3: Matrices de Householder

La matrice de Householder en dimension n est définie comme la matrice

$$\boldsymbol{H}_n = \boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{u}_n = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{n} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{n} \end{bmatrix}.$$

a) Justifier que $\boldsymbol{H}_n$ est symétrique.

b) Montrer que $\boldsymbol{H}_n^2 = \boldsymbol{I}_n$. Pourquoi cela implique-t-il que la matrice est orthogonale ?

c) On considère le cas $n = 3$. Montrer que $\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_3$, et que $\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ orthogonal à $\boldsymbol{u}_3$.

Exercice 7.4: Projection polynômiale

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 muni du produit scalaire

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2, \qquad \langle P, Q\rangle := \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)\,dX.$$

NB: On notera que $\int_{-1}^{1} X^{2p}\,dX = \frac{2}{2p+1}$ *et* $\int_{-1}^{1} X^{2p+1}\,dX = 0$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.

a) Justifier que $(P_1, P_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X)$ est une famille orthonormale de vecteurs.

b) Projeter le polynôme $\pi(X) = X^2$ sur $\mathrm{vect}(\{P_1, P_2\})$.

c) Comment utiliser cette projection pour former une base orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$?