Feuille d'exercices 6 : Espaces euclidiens

Algèbre linéaire et applications aux sciences des données, DL2 IASO

Version 2, décembre 2024

Exercice 6.1: Gram-Schmidt

Soit $\mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 muni de la forme quadratique q et du produit scalaire associé donnés pas

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2, \qquad q(P) := \int_0^1 P(x)^2\,dx \quad \text{et} \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx.$$

NB : Comme ce cours n'est pas un cours d'intégration, on donne la formule

$$\int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d \qquad \forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

a) Justifier que q est bien définie.

b) Justifier que la base $1, X, X^2, X^3$ (que l'on peut considérer comme la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$) n'est pas orthogonale et que les vecteurs ne sont pas de norme 1.

c) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour calculer une base orthonormale à partir de $1, X, X^2, X^3$.

Exercice 6.2: Matrices et orthogonalité

Soit $\mathcal{S}^n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{R}^{n\times n}$ muni de la forme quadratique $\boldsymbol{A} \mapsto \operatorname{trace}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

a) Donner le produit scalaire associé à la forme quadratique, que l'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

b) Soit $\mathcal{A}^n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que $\mathcal{S}^n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}^n(\mathbb{R})$.

c) Dans le cas $n = 2$, donner une base orthonormale de $\mathcal{S}^n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.3: Sous-espaces euclidiens

Soit E un espace euclidien de dimension n et $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les résultats suivants (énoncés en cours)

a) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$;

b) $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice 6.4: Base orthonormée

Soit l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de la forme quadratique $q\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \qquad q(\boldsymbol{x}) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2.$$

a) Donner le produit scalaire associé à q.

b) Les vecteurs $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ sont-ils orthogonaux relativement à q ? Sont-ils de norme 1 ?

c) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux deux vecteurs de la question précédente pour obtenir deux vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ orthogonaux et de norme 1.

d) Soit $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. Justifier alors que $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ muni de q.

Exercice 6.5: PSS

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la forme quadratique "canonique", c'est-à-dire de la forme quadratique associée au produit scalaire

$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \qquad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

de sorte que la forme quadratique est $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$. On notera $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$ la norme associée.

Étant donnée une famille $\mathcal{D}$ de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$, on dit que cette famille est un PSS (de l'anglais *Positive Spanning Set*) si

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}, \qquad \exists \boldsymbol{d} \in \mathcal{D}, \quad \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} > 0.$$

Dans la suite, on note $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) On se place d'abord dans le cas $n = 2$.

   i) Montrer que la famille $\mathcal{D}_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_2\}$ n'est pas un PSS.

   ii) Montrer que $\mathcal{D}_2 = \{\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\}$ est un PSS.

b) On revient maintenant au cas d'une dimension $n \geq 1$ quelconque.

i) Justifier que $\mathcal{D}_3 = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ n'est pas un PSS.

ii) Montrer que $\mathcal{D}_4 = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, -\boldsymbol{e}_1, \ldots, -\boldsymbol{e}_n\}$ est un PSS.

iii) Donner un PSS de la forme $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{d}\}$, où $\boldsymbol{d}$ est un vecteur que l'on précisera.