Feuille d'exercices 5 : Formes quadratiques

Algèbre linéaire et applications aux sciences des données, DL2 IASO

Novembre 2024

Exercice 5.1: Forme quadratique en dimension infinie

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} b: & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \int_0^1 f(x)g(x)\,dx. \end{array}$$

a) Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique.

b) Donner la forme quadratique dont b est la forme polaire.

Exercice 5.2: Représentation de forme quadratique

Soit $q : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(\boldsymbol{M}) = \mathrm{trace}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})$.

a) Justifier que $q(\lambda \boldsymbol{M}) = \lambda^2 q(\boldsymbol{M})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que la forme polaire associée à q est la forme bilinéaire $p : (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \mapsto \mathrm{trace}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N})$.

c) Écrire la matrice représentative de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

d) Soit la fonction $q_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{M} \mapsto \mathrm{trace}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M})$ où $\boldsymbol{A}$ est une matrice symétrique de $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Que devient le résultat de la question c) ?

Exercice 5.3: Propriétés des formes quadratiques

Pour chacune des matrices ci-dessous, donner les caractéristiques de la forme quadratique associée (est-elle définie ? dégénérée ? semi-définie positive/négative ? définie positive/négative ?).

a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$;

b) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Solutions

Solution de l'exercice 5.1: Forme quadratique en dimension infinie

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} b: & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \int_0^1 f(x)g(x)\,dx. \end{array}$$

a) Il suffit de vérifier que $b(\cdot,g)$ et $b(f,\cdot)$ sont des formes linéaires, c'est-à-dire des applications linéaires à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cela découle de la linéarité de l'intégrale lorsque f ou g est fixée.

b) On obtient la forme quadratique en question, notée q, en définissant $q(f) = b(f,f) = \int_0^1 f(x)^2\,dx$ pour tout $f \in E$.

Solution de l'exercice 5.2: Représentation de forme quadratique

Soit $q : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(\boldsymbol{M}) = \operatorname{trace}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})$.

a) Il suffit d'écrire

$$\operatorname{trace}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} M_{ij}^2$$

pour observer que

$$q(\lambda\boldsymbol{M}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\lambda M_{ij})(\lambda M_{ij}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\lambda^2 M_{ij}^2 = \lambda^2 q(\boldsymbol{M}).$$

NB : Cela confirme que q est une forme quadratique.

b) On a immédiatement $q(\boldsymbol{M}) = p(\boldsymbol{M},\boldsymbol{M})$ pour tout $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Il reste à montrer que p est symétrique. Cela découle des propriétés de la trace. On a en effet

$$p(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}) = \operatorname{trace}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}) = \operatorname{trace}(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}) = p(\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}).$$

Comme la forme polaire est unique, il s'agit bien de p.

c) La base canonique de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ est formée par les matrices $\boldsymbol{E}_i \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telles que

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2 = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_4 = \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_5 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_6 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_7 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_8 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_9 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

La matrice représentative de q dans la base canonique est une matrice $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ telle que $\boldsymbol{Q}_{ij} = p(\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{E}_j)$ pour tous i,j. On obtient ainsi que $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_9$.

d) Par le même raisonnement, on observe que la forme polaire associée à $q_{\boldsymbol{A}}$ est $p_{\boldsymbol{A}} : (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \mapsto \operatorname{trace}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{N})$, qui est symétrique car $\boldsymbol{A}$ l'est.

Le calcul de la matrice représentative demande en principe de calculer 45 valeurs $p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{E}_j)$ (par symétrie, cela permet de remplir toute la matrice).

On donne ci-dessous les différents cas possibles.

- Pour tout $i \in \{1, \ldots, 9\}$, on observe que $q(\boldsymbol{E}_i) = [\boldsymbol{A}]_{\ell,\ell}$, avec ℓ l'indice de la ligne contenant le 1 de la matrice $\boldsymbol{E}_i$. Pour les 3 premières matrices, on a en effet :

$$\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_1) = A_{11},$$

$$\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_4 \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_4 \begin{bmatrix} 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 \\ 0 & A_{31} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_2) = A_{11},$$

et

$$\boldsymbol{E}_3^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{E}_7 \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{E}_7 \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{11} \\ 0 & 0 & A_{21} \\ 0 & 0 & A_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_3) = A_{11}.$$

- Pour tous (i, j) tels que $\boldsymbol{E}_i$ et $\boldsymbol{E}_j$ contiennent un 1 sur des lignes et colonnes différentes, on a $p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{E}_j) = 0$.

$$\boldsymbol{E}_5^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_5 \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_5 \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_5) = 0,$$

$$\boldsymbol{E}_6^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_8 \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_8 \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_6) = 0,$$

$$\boldsymbol{E}_8^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_6 \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_6 \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_8) = 0,$$

et

$$\boldsymbol{E}_9^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_9 \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_9 \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_9) = 0.$$

- Pour tous (i, j) tels que $\boldsymbol{E}_i$ et $\boldsymbol{E}_j$ contiennent un 1 sur la même ligne mais pas la même colonne, $p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{E}_j) = 0$.

$$\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_4 \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_4 \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2) = 0$$

et

$$\boldsymbol{E}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_6\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_6\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_6) = 0.$$

- Pour tous (i, j) tels que $\boldsymbol{E}_i$ et $\boldsymbol{E}_j$ contiennent un 1 sur la même colonne mais pas la même ligne, $p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{E}_j) = A_{\ell_i \ell_j}$, où ℓ_i et ℓ_j sont les indices des lignes contenant le 1 de $\boldsymbol{E}_i$ et $\boldsymbol{E}_j$.

$$\boldsymbol{E}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_4) = A_{21} = A_{12},$$

$$\boldsymbol{E}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_3\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_7) = A_{31} = A_{13},$$

$$\boldsymbol{E}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_4 = \boldsymbol{E}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_4 = \boldsymbol{E}_3\begin{bmatrix} A_{21} & 0 & 0 \\ A_{22} & 0 & 0 \\ A_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_4, \boldsymbol{E}_7) = A_{23} = A_{32}.$$

On conclut de ces observations que chacune des lignes de la matrice $\boldsymbol{A}$ contient 3 coefficients non nuls.

Au total, et en se rappelant que la matrice $\boldsymbol{A}$ est symétrique, la matrice représentative de $q_{\boldsymbol{A}}$ est donnée par

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} \\ A_{12} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} \\ A_{13} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & A_{13} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & A_{33}. \end{bmatrix}$$

Solution de l'exercice 5.3: Propriété des formes quadratiques

Note : Pour montrer qu'une matrice $\boldsymbol{M}$ est (semi)-définie positive, on montre (pour l'instant) que $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} > 0$ ($\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} \geq 0$).

a) La matrice $\boldsymbol{A}$ est définie positive. En effet, pour tout $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} &= 4x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

Comme cette quantité s'écrit comme une somme de carrés, elle est positive ou nulle (ce qui montre que la matrice est *semi*-définie positive). Par ailleurs, on a $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = 0$ si et seulement si $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_3)^2 = 0$: il en résulte que $\boldsymbol{A}$ est définie positive, et donc que la forme quadratique associée est également définie positive. On en déduit aussi que la forme quadratique est définie ($\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$), et on sait alors qu'elle est également non dégénérée.

b) La matrice $\boldsymbol{B}$ n'est ni définie positive, ni définie négative (on parle typiquement de matrice indéfinie), car $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} \boldsymbol{B} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} < 0$ et $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} \boldsymbol{B} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} > 0$. Le noyau de la matrice, qui correspond au noyau de la forme quadratique, est réduit au vecteur nul :

$$\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}-x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

par conséquent la forme quadratique associée est non dégénérée. Elle n'est cependant pas définie, car le $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ est isotrope : $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = 1 - 1 = 0$.

c) La matrice $\boldsymbol{C}$ est semi-définie positive, car pour tout $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, on a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2\\ &= (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Elle n'est en revanche pas définie positive, car le vecteur $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ est un vecteur isotrope non nul ($\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} = 0$) et un vecteur du noyau de $\boldsymbol{C}$ non nul ($\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$).

On en conclut donc que la forme quadratique associé à $\boldsymbol{C}$ est semi-définie positive, non définie et dégénérée.