Feuille d'exercices 4 : Révisions et forme de Jordan

Algèbre linéaire et applications aux sciences des données, DL2 IASO

Octobre 2024 (version 2)

Exercice 4.1: Matrice dans $\mathbb{C}^{4\times 4}$

Étant donné $\alpha \in \mathbb{C}$, on considère la matrice

$$\boldsymbol{M}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Cette matrice est-elle diagonalisable ?

b) Soit $u_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ l'endomorphisme dont $\boldsymbol{M}_\alpha$ est la représentation dans la base canonique, que l'on note $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$. Donner la représentation de u_α dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4)$.

Exercice 4.2: Équations polynômiales de matrices

Pour chacune des propriétés suivantes, donner toutes les matrices $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ vérifiant cette propriété :

a) $\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{I}_3$.

b) $\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{M}$.

c) $\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{0}$.

Exercice 4.3: Exponentielle de matrice

Pour toute matrice $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, on considère l'exponentielle de matrice définie par

$$\exp(\boldsymbol{M}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

(On admettra que cette série est bien définie, notamment pour le cas $n = 1$, et que l'on peut donc parler de l'exponentielle de tout nombre complexe, cf. cours de Clément Tauber pour en savoir plus!)

a) On suppose tout d'abord que $\boldsymbol{M}$ est diagonalisable.

   i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une formule pour $\boldsymbol{M}^k$ basée sur une diagonalisation de $\boldsymbol{M}$.

   ii) En déduire une formule de $\exp(\boldsymbol{M})$ qui facilite son calcul.

b) On suppose maintenant que $\boldsymbol{M}$ se décompose en $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{N}$, où $\boldsymbol{D}$ est diagonalisable, $\boldsymbol{N}$ est nilpotente d'indice ps et $\boldsymbol{DN} = \boldsymbol{ND}$.

   i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une expression de $\boldsymbol{M}^k$ en fonction de $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{D}$.

   ii) En déduire que $\exp(\boldsymbol{M})$ s'écrit comme une somme finie de matrices.

Exercice 4.4: Calcul de forme de Jordan

Donner la forme de Jordan de la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4.5: Formes de Jordan possibles

Soit une matrice $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ telle que le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{M}$ soit

$$\chi_{\boldsymbol{M}}(X) = (3 + X)^4 (4 - X)^2.$$

Donner les valeurs possibles du polynôme minimal de $\boldsymbol{M}$, ainsi que les formes de Jordan associées.

Solutions

Solution de l'exercice 4.4 : Calcul de forme de Jordan

Donner la forme de Jordan de la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$ est donné par

$$\begin{aligned}
\chi_{\boldsymbol{A}}(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1-X & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1-X & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)\begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 \\ 0 & -1-X & -2 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & -2 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(-1-X)\begin{vmatrix} -1-X & -2 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1-X & -2 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(-1-X)[(1-X)(-1-X)+2] + 2(1-X)(-1-X) + 4 \\
&= (1-X^2)^2 - 4(1-X^2) + 4 \\
&= (-1-X^2)^2 = (X^2+1)^2 = (X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2.
\end{aligned}$$

La matrice $\boldsymbol{A}$ n'a pas de valeur propre réelle, mais elle possède deux valeurs propres doubles réelles. En calculant $\boldsymbol{A} - \mathrm{i}\boldsymbol{I}_4$ et $\boldsymbol{A} + \mathrm{i}\boldsymbol{I}_4$, on s'aperçoit que le polynôme minimal de $\boldsymbol{A}$ est égal au polynôme caractéristique. Par conséquent, la forme de Jordan de la matrice $\boldsymbol{A}$ est

$$\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{J}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \mathrm{i}\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{J}_2 \end{bmatrix}.$$

Solution de l'exercice 4.5: Formes de Jordan possibles

Comme $\chi_{\boldsymbol{M}}(X) = (3+X)^4(4-X)^2$, le polynôme minimal $\pi_{\boldsymbol{M}}$ est dans l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{llll} (3+X)(4-X), & (3+X)^2(4-X), & (3+X)^3(4-X), & (3+X)^4(4-X), \\ (3+X)(4-X)^2, & (3+X)^2(4-X)^2, & (3+X)^3(4-X)^2, & (3+X)^4(4-X)^2 \end{array} \right\}.$$

Chacune de ces possibilités définit une structure de Jordan. Par exemple, si le polynôme minimal est $(3+X)(4-X)$, alors $\boldsymbol{M}$ est diagonalisable, et elle est semblable à

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Si, en revanche, on a $\pi_{\boldsymbol{M}}(X) = (3+X)^4(4-X)^2$, alors $\boldsymbol{M}$ est semblable à

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\boldsymbol{I}_4 + \boldsymbol{J}_3 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 4\boldsymbol{I}_4 + \boldsymbol{J}_2 \end{bmatrix},$$

où $\boldsymbol{J}_2$ et $\boldsymbol{J}_3$ sont les blocs de Jordan de tailles 2 et 3 évoqués en cours.

Soit une matrice $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ telle que le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{M}$ soit

$$\chi_{\boldsymbol{M}}(X) = (3+X)^4(4-X)^2.$$

Donner les valeurs possibles du polynôme minimal de $\boldsymbol{M}$, ainsi que les formes de Jordan associées.