Feuille d'exercices 3 : Réduction et polynômes

Algèbre linéaire et applications aux sciences des données, DL2 IASO

Octobre 2024 (version 2)

Exercice 3.1: Diagonalisation (et calcul)

On considère la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1/2 & -1/2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 20 & -5 & -3 \end{bmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$. Cette matrice est-elle trigonalisable dans $\mathbb{R}$?

b) Calculer le polynôme minimal de $\boldsymbol{A}$. La matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

Exercice 3.2: Polynôme annulateur

Soit $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que $P(\boldsymbol{M}) = \mathbf{0}$, où $P[X] = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

a) Soit un vecteur $\boldsymbol{x}$ tel que $\boldsymbol{Mx} \neq \mathbf{0}$. Justifier que la famille $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Mx})$ est libre.

b) En déduire que $\boldsymbol{M}$ est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 3.3: Valeurs propres généralisées

Soient $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre généralisée associée à $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ s'il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{Bx}$ (on dira alors que $\boldsymbol{x}$ est un vecteur propre généralisé).

a) Si $\boldsymbol{B}$ est inversible, justifier que les valeurs propres généralisées de $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ sont les valeurs propres de $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$.

b) Supposons que $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ soient inversibles et co-diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ et $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ sont des matrices diagonales. On suppose également que $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ possèdent chacune n valeurs propres distinctes.

i) Justifier qu'il existe une base dont chaque vecteur est à la fois vecteur propre de $\boldsymbol{A}$ et vecteur propre de $\boldsymbol{B}$.

ii) Donner alors une formule pour les valeurs propres généralisées.

iii) Que devient le résultat du ii) si l'une des deux matrices $\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B}$ possède des valeurs propres nulles ?

Exercice 3.4: Espaces de Krylov (version mise à jour)

Soit une matrice $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. On considère son polynôme caractéristique $\chi_{\boldsymbol{M}}(X) = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n$.

a) Étant donné un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$, que vaut $\chi_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{v}$?

b) On suppose que $\boldsymbol{M}$ est inversible. Exprimer alors l'inverse de $\boldsymbol{M}$, notée $\boldsymbol{M}^{-1}$, comme un polynôme en $\boldsymbol{M}$.

c) En déduire une expression de $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{v}$, où $\boldsymbol{v}$ est le vecteur de la question a).

d) Les résultats précédents sont souvent utilisés dans le cadre des sous-espaces de Krylov. Étant donnés $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{v}$, le k-ième sous-espace de Krylov est défini comme le sous-espace vectoriel

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, k) = \mathrm{vect}\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{M}^{k-1}\boldsymbol{v}\right). \tag{1}$$

i) Justifier que $\mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, k) = \mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, n)$ pour tout $k \geq n$.

ii) Supposons que $\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de $\boldsymbol{M}$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Quelle propriété cela implique-t-il sur les espaces de Krylov ?

iii) On suppose que $\boldsymbol{M}$ est inversible et possède n valeurs propres distinctes. On note $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ une base de vecteurs propres. Montrer que $\mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, n) \neq \mathbb{C}^n$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathrm{vect}(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-1})$, et en déduire une condition nécessaire pour que $\mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, n) = \mathbb{C}^n$.

Solutions

Solution de l'exercice 3.1: Diagonalisation (et calcul)

Les valeurs propres de la matrice sont 2 (valeur propre double) et 0.

a) Le polynôme caractéristique vaut $(-1)X(X-2)^2$. Il est scindé, et donc la matrice est trigonalisable. *En revanche, il n'est pas scindé, mais on ne peut pas conclure que la matrice est diagonalisable via son polynôme caractéristique.*

b) Le polynôme minimal de la matrice vaut $X(X-2)$, car $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_3)=\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{3\times 3}}$. Ce polynôme est scindé à racines simples, elle est donc diagonalisable.

Solution de l'exercice 3.2: Polynôme annulateur

a) Si la famille $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{M}\boldsymbol{x})$ était libre, alors on aurait $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. Par conséquent, $\boldsymbol{x}$ serait un vecteur propre de $\boldsymbol{M}$ dans $\mathbb{R}$, or $\boldsymbol{M}$ n'a pas de valeur propre réelle car le polynôme caractéristique n'a pas de racine réelle.

b) Il suffit d'exprimer l'endomorphisme représenté par $\boldsymbol{M}$ dans la base canonique dans la base $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{M}\boldsymbol{x})$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} &= 0\times\boldsymbol{x}+1\times\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{x}=-1\times\boldsymbol{x}+0\times\boldsymbol{M}\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

où la seconde égalité provient du fait que $\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{0}$.

Solution de l'exercice 3.3: Valeurs propres généralisées

a) La preuve consiste simplement à appliquer l'inverse de $\boldsymbol{B}$ dans la définition des valeurs propres généralisées :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}.$$

b) i) Par définition de la diagonalisation, les colonnes de $\boldsymbol{P}$ sont des vecteurs propres pour $\boldsymbol{A}$ et pour $\boldsymbol{B}$.

ii) Si $\{\alpha_i\}$ et $\{\beta_i\}$ sont les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, on montre que α_i/β_i est une valeur propre généralisée associée à la $i$ème colonne de $\boldsymbol{P}$. Réciproquement, si $\lambda\in\mathbb{R}$ est une valeur propre, alors il existe $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ tel que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$. En écrivant $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ (ce qui est toujours possible car $\boldsymbol{P}$ est inversible).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{Bx} \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\beta_1 & & \\ & \beta_2 & \\ & & \beta_n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}\alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_n\end{bmatrix}\boldsymbol{y} = \lambda \begin{bmatrix}\beta_1 & & \\ & \beta_2 & \\ & & \beta_n\end{bmatrix}\boldsymbol{y} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 y_1 & = & \lambda \beta_1 y_1 \\ \alpha_2 y_2 & = & \lambda \beta_2 y_2 \\ \vdots & & \\ \alpha_n y_n & = & \lambda \beta_n y_n \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $\boldsymbol{x}$ est non nul, $\boldsymbol{y}$ est aussi non nul. Il en résulte qu'il existe i tel que $y_i = 0$, et donc $\lambda = \frac{\alpha_i}{\beta_i}$. Il s'agit donc des seules valeurs propres possibles.

iii) Si $\alpha_i \neq 0$ et $\beta_i = 0$, alors il n'y a pas de valeur propre généralisée associée à ces coefficients. En revanche, si $\alpha_i = 0$ et $\beta_i \neq 0$, alors le vecteur propre associé est un vecteur propre généralisé associé à 0.

Solution de l'exercice 3.4: Espaces de Krylov

a) D'après le théorèm de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est annulateur de la matrice. On a donc $\chi_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{0}$, d'où $\chi_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

b) Le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{M}$ s'écrit $\chi_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{M}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \boldsymbol{M}^i = \boldsymbol{0}$, avec $a_n = (-1)^n$. Notons a_k le coefficient non nul associé au plus petit indice $k \in \{1, \dots, n\}$ (qui existe puisque $a_n \neq 0$). On a alors

$$\sum_{i=k}^{n} a_i \boldsymbol{M}^i = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{M}^{-1} = -\frac{1}{a_k}\sum_{i=k+1}^{n} a_i \boldsymbol{M}^{i-(k+1)} = -\frac{1}{a_k}\sum_{i=0}^{n-(k+1)} a_{i+k+1}\boldsymbol{M}^i,$$

ce qui exprime bien $\boldsymbol{M}^{-1}$ comme un polynôme en $\boldsymbol{M}$.

c) Par conséquence directe de ce qui précède, et avec les mêmes notations, on a

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{v} = -\frac{1}{a_k}\sum_{i=0}^{n-(k+1)} a_{i+k+1}\boldsymbol{M}^i\boldsymbol{v}.$$

Le vecteur $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{v}$ s'exprime donc comme combinaison linéaire des $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{Mv}, \dots, \boldsymbol{M}^{n-1}\boldsymbol{v}$.

d) ...

i) A partir de $k = n$ la famille qui génère le sous-espace est nécessairement liée, et donc la dimension ne peut plus augmenter en ajoutant des vecteurs (l'espace de Krylov devient donc stable par $\boldsymbol{M}$).

ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{M}^k \boldsymbol{v} = \lambda^k \boldsymbol{v}$, et donc

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, k) = \mathrm{vect}\{\boldsymbol{v}, \lambda \boldsymbol{v}, \dots, \lambda^k \boldsymbol{v}\} = \mathrm{vect}\{\boldsymbol{v}\}.$$

Les espaces de Krylov sont donc tous de dimension 1, et identiques.

iii) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ les valeurs propres distinctes associées à $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_{n-1}$.
Si $\boldsymbol{v} \in \mathrm{vect}\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_{n-1}\}$, alors en notant $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \boldsymbol{p}_i$, on a $\boldsymbol{M}^k \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^k v_i \boldsymbol{p}_i$, et donc

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, n) \subseteq \mathrm{vect}\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_{n-1}\} \subsetneq \mathbb{C}^n.$$

Pour que $\mathcal{K}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, n) = \mathbb{C}^n$, il est donc nécessaire que $\boldsymbol{v}$ ait une composante non nulle en chacun des vecteurs de la base de vecteurs propres. *Ce n'est pas la seule condition possible, mais on ne demande pas ici de caractériser précisément les vecteurs $\boldsymbol{v}$ tels que $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{v}, \backslash) = \mathbb{C}^{\backslash}$.*