Feuille d'exercices 2 : Valeurs propres

Algèbre linéaire et applications aux sciences des données, DL2 IASO

Septembre 2024 (Version 2, 7 exercices)

Exercice 2.1: Calcul de valeurs propres

Soit la matrice $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Montrer que 2 est une valeur propre de $\boldsymbol{M}$, et calculer une base du sous-espace propre associé.

Exercice 2.2: Pas de valeurs propres

Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, et u l'application linéaire

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \end{array}$$

où $y_0 = 0$ et $y_{n+1} = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cet endomorphisme ne possède aucune valeur propre.

Exercice 2.3: Beaucoup de valeurs propres

Soit $\mathcal{F}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, et u l'application dérivée, qui à tout $f \in \mathcal{F}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ associe sa dérivée $f' \in \mathcal{F}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de u.

Exercice 2.4: Valeurs propres et matrices complexes

a) On considère la matrice complexe $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$.

   i) Montrer que 0 est valeur propre de $\boldsymbol{A}$.

   ii) Existe-t-il d'autres valeurs propres ?

b) On considère maintenant la matrice complexe $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{bmatrix}$, dont on va montrer qu'elle ne possède que des valeurs propres réelles.

   i) Montrer que -1 est une valeur propre de $\boldsymbol{B}$.

   ii) Déterminer une seconde valeur propre de $\boldsymbol{B}$.

Exercice 2.5: Produits et valeurs propres

Soient les matrices $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On a alors $\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) En utilisant leurs polynômes caractéristiques, calculer les valeurs de propres de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$.

b) Les valeurs propres de $\boldsymbol{AB}$ sont-elles le produit des valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ et de celles de $\boldsymbol{B}$?

c) Les matrices $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ ont-elles les mêmes valeurs propres ?

Exercice 2.6: Matrices rectangulaires et valeurs propres

Soit la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$. Cette matrice est rectangulaire (elle appartient à $\mathbb{R}^{2\times 3}$) et il n'est donc pas approprié de parler de valeurs propres de $\boldsymbol{A}$. En revanche, on peut étudier les valeurs propres de $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ et $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, où $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ s'appelle la matrice transposée de $\boldsymbol{A}$.

a) On s'intéresse d'abord à la matrice $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calculer ses valeurs propres par la méthode du polynôme caractéristique.

b) En utilisant les expressions de $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ et $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, montrer que les valeurs propres de $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ sont aussi valeurs propres de $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$. *Indication : on cherchera à construire des vecteurs propres pour $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ à partir de ceux de $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$.*

c) Montrer que $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ possède une valeur propre nulle.

Exercice 2.7: Multiplicités de valeurs propres

a) Calculer le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. En déduire les valeurs propres de $\boldsymbol{J}$, ainsi que les multiplicités algébriques associées.

b) Déterminer le sous-espace propre associé à chaque valeur propre de $\boldsymbol{J}$, et ainsi la multiplicité géométrique de ces valeurs propres (dont on rappelle qu'il s'agit de la dimension des sous-espaces propres associés). A-t-on égalité entre multiplicités algébriques et multiplicités géométriques ?

c) Reprendre les questions précédentes pour la matrice $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solutions

Solution de l'exercice 2.1: Calcul de valeurs propres

Il y a plusieurs manières de répondre à cette question, notamment si l'on peut exhiber un vecteur $\boldsymbol{x}$ non nul tel que $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$. On peut également montrer que 2 est racine du polynôme caractéristique de $\boldsymbol{M}$.

On adopte ici la première approche, et on résout le système $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$, qui s'écrit

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 6x_3 &= 2x_1 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 2x_2 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 &= 2x_3 \end{cases}$$

En sommant la première et la dernière équations, on obtient

$$6x_1 + 2x_3 = 2x_1 + 2x_3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0.$$

En injectant cette valeur dans la première équation, on obtient $x_2 = 6x_3$. Prendre $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ permet donc d'avoir un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Solution de l'exercice 2.2: Pas de valeurs propres

On montre cela par l'absurde. Supposons qu'il existe $\{x_n\}_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non nulle telle que $\{y_n\} = u(\{x_n\}) = \lambda\{x_n\}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on doit avoir $y_0 = \lambda x_0$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on doit avoir $y_{n+1} = x_n = \lambda x_{n+1}$.

Comme $y_0 = 0$, on doit avoir $\lambda = 0$ ou $x_0 = 0$. Si $x_0 = 0$, alors $y_1 = x_0 = 0$, et donc $x_1 = 0$. Il en résulte que $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais alors $\{x_n\}$ est la suite nulle, et donc ne peut pas être vecteur propre. Si $\lambda = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $y_{n+1} = x_n = \lambda x_{n+1} = 0$, et donc $\{x_n\}$ est encore une fois la suite nulle, ce qui est absurde.

On a donc montré que u ne peut pas avoir de valeurs propres.

Solution de l'exercice 2.3: Beaucoup de valeurs propres

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$, qui est non constante égale à 0. Alors $(f_\lambda)' : x \mapsto \lambda e^{\lambda x}$, et donc $u(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$.

Solution de l'exercice 2.4: Valeurs propres et matrices complexes

a) Le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$ est

$$\begin{vmatrix} \mathrm{i} - X & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} - X \end{vmatrix} = (\mathrm{i} - X)(-\mathrm{i} - X) - 1 = -1 + X^2 - 1 = X^2.$$

Par conséquent, la matrice $\boldsymbol{A}$ n'a que des valeurs propres nulles. (Prendre $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ pour un vecteur propre.)

b) Par le calcul, on obtient que le vecteur $\begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur -1. En calculant le polynôme caractéristique, on obtient

$$\begin{vmatrix} 2-X & 3-3\mathrm{i} \\ 3+3\mathrm{i} & 5-X \end{vmatrix} = X^2 - 7X - 8 = (X+1)(X-8).$$

On en déduit que 8 est la seconde valeur propre. On notera que le polynôme est égal à $X - \operatorname{trace}(\boldsymbol{B})X + \det(\boldsymbol{B})$.

Solution de l'exercice 2.5: Produits et valeurs propres

a) Notons $\chi_{\boldsymbol{A}}$ et $\chi_{\boldsymbol{B}}$ les polynômes caractéristiques respectifs de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$. Comme les matrices sont triangulaires, on a $\chi_{\boldsymbol{A}}(X) = \chi_{\boldsymbol{B}} = (X-1)^2$. Les deux matrices ont pour valeur propre double 1, ce qui se lit également sur la diagonale.

b) En calculant les polynômes caractéristiques de $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$, on trouve

$$\chi_{\boldsymbol{AB}}(X) = X^2 - 4X + 1 \quad \text{et} \quad \chi_{\boldsymbol{BA}}(X) = X^2 - 4X + 1$$

ce qui donne comme valeurs propres $\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$. Il ne s'agit donc pas du produit des valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$.

c) Les matrices $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ ont même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres.

Solution de l'exercice 2.6: Matrices rectangulaires et valeurs propres

a) La matrice $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5/2 & -3/2 \\ -3/2 & 5/2 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres 1 et 4, car son polynôme caractéristique vaut

$$X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$$

b) Un calcul donne $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5/2 & -3/2 & 0 \\ -3/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, et on observe alors que $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ contient $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ comme sous-matrice. Soit un vecteur propre $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. Alors, le vecteur $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ associé à la même valeur propre que le vecteur d'origine.

c) Il suffit d'observer que le vecteur propre $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

Solution de l'exercice 2.7: Multiplicités et valeurs propres

a) Le polynôme caractéristique de J est $(-1)X^2(X-1)$: les valeurs propres associées sont donc 0 et 1, de multiplicités algébriques respectives 2 et 1. *On peut lire ces valeurs propres sur la diagonale car la matrice est triangulaire.*

b) En résolvant le système $\boldsymbol{Jx} = \boldsymbol{0}$, on obtient

$$\boldsymbol{Jx} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

donc $\boldsymbol{x}$ est de la forme $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. De même, en résolvant $\boldsymbol{Jx} = \boldsymbol{x}$, on obtient

$$\boldsymbol{Jx} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_2 & = & x_1 \\ x_3 & = & x_2 \\ x_3 & = & x_3 \end{array} \right. ,$$

et donc $\boldsymbol{x}$ est de la forme $\begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Dans les deux cas, le sous-espace propre est de dimension 1. Pour la valeur propre 0, il n'y a donc pas égalité entre multiplicités algébrique et géométrique, par contre c'est le cas pour la valeur propre 1 (et c'est toujours le cas pour une valeur propre simple).

c) Le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{S}$ est $(-1)(X-1)^2(X+1)$, donc ses valeurs propres sont 1 (multiplicité algébrique 2) et -1 (multiplicité algébrique 1). Par ailleurs, les sous-espaces propres associés s'écrivent :

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \end{bmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{and} \quad E_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\},$$

et sont donc de dimensions 2 et 1, respectivement. Il y a donc égalité entre multiplicités algébrique et géométrique dans ce cas.