Feuille d'exercices 1 : Rappels d'algèbre linéaire

Algèbre linéaire et applications aux sciences des données, DL2 IASO

Septembre 2024

Exercice 1.1: Un espace vectoriel

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de l'addition usuelle est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Avec la même loi, est-ce un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? Est-ce un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ?

Exercice 1.2: Sous-espace vectoriel

On considère l'ensemble des imaginaires purs, noté

$$\mathrm{i}\mathbb{R} := \{y\mathrm{i} \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Montrer que $\mathrm{i}\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Justifier que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 1.3: Application moyenne

Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \longmapsto & \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \end{array}$$

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Déterminer le noyau de f et son image.

c) Reprendre les questions a) et b) pour l'application

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \longmapsto & \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \end{bmatrix}. \end{array}$$

d) Calculer les représentations matricielles de f et g dans les bases canoniques des espaces considérés.

Exercice 1.4: Matrices Toeplitz

On considère l'ensemble des matrices Toeplitz de $\mathbb{R}^{3\times 3}$, défini par

$$\mathcal{T} := \left\{ \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_1 & t_2 \\ t_5 & t_4 & t_1 \end{bmatrix}, (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

Ces matrices sont notamment utilisées pour définir les couches de certains réseaux de neurones (CNNs, ou *convolutional neural networks*).

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

b) Soit une matrice $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}$. Quelle application linéaire représente-t-elle dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

c) On considère maintenant le sous-ensemble de $\mathcal{T}$ donné par

$$\mathcal{C} := \left\{ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{bmatrix}, (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

(i) Justifier que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(ii) Montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{bmatrix} \end{array}$$

est une application linéaire bijective.

Exercice 1.5: Centrage de données

On considère une matrice $\boldsymbol{X} = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ représentant des données. On suppose que chaque ligne de $\boldsymbol{X}$ contient des données propres à une personne et que chaque colonne représente un attribut particulier (par exemple des notes d'étudiant(e)s pour une UE). Pour chaque colonne $j \in \{1, \dots, m\}$, on définit alors la moyenne de $\boldsymbol{X}$ sur l'attribut j, comme la quantité

$$\mu_j(\boldsymbol{X}) := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}.$$

Le vecteur moyen associé à $\boldsymbol{X}$ est alors le vecteur $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) := [\mu_j(\boldsymbol{X})]_{j=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$. On dit que l'on effectue un **centrage des données** lorsque l'on passe de la matrice $\boldsymbol{X}$ à la matrice

$$\overline{\boldsymbol{X}} := \begin{bmatrix} x_{11} - \mu_1(\boldsymbol{X}) & \cdots & x_{1n} - \mu_n(\boldsymbol{X}) \\ x_{21} - \mu_1(\boldsymbol{X}) & \cdots & x_{2n} - \mu_n(\boldsymbol{X}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} - \mu_1(\boldsymbol{X}) & \cdots & x_{nn} - \mu_n(\boldsymbol{X}) \end{bmatrix}.$$

a) Montrer que l'application $\boldsymbol{X} \mapsto \overline{\boldsymbol{X}}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^{m\times n}$ dans $\mathbb{R}^{m\times n}$.

b) Montrer que $\boldsymbol{\mu}(\overline{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{0}$.

c) **Application :** On considère la matrice de données $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 17 \\ 12 & 13 & 15 \\ 12 & 11 & 13 \end{bmatrix}$.

   i) Calculer le vecteur moyen $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X})$ et la version centrée de cette matrice $\overline{\boldsymbol{X}}$.

   ii) En utilisant ces quantités, justifier que le premier attribut du jeu de données n'est pas discriminant entre les différentes personnes.

   iii) En utilisant ces quantités, justifier que le seconde personne du jeu de données est représentative de la moyenne.

Solutions

Solution de l'exercice 1.1: Un espace vectoriel

a) Conformémement à la définition, il s'agit de vérifier tous les axiomes, qui sont valides grâce aux propriétés des réels.

b) Il ne s'agit pas d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel car $i.f$ est une fonction à valeurs complexes et non réelles. En revanche, comme $q.f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$, il s'agit bien d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Solution de l'exercice 1.2: Sous-espace vectoriel

On considère l'ensemble des imaginaires purs, noté

$$\mathrm{i}\mathbb{R} := \{y\mathrm{i} \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

a) On vérifie sans peine que $\lambda.x + y \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $(x, y) \in \mathrm{i}\mathbb{R}^2$.

b) Il suffit de remarquer que $\mathrm{i}.x \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 1.3: Application moyenne

a) Pour tous $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f\left(\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = \frac{\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + y_1 + y_2 + y_3}{3} = \lambda f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right).$$

b) En résolvant $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = 0$, on obtient que le noyau de f est l'ensemble

$$\ker(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

tandis que l'image est par définition égale à

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; y = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right\}.$$

Pour tout réel y, on observe que $y = f\left(\begin{bmatrix} y \\ y \\ y \end{bmatrix}\right)$. Par conséquent, l'image de f est égale à $\mathbb{R}$. Par le même procédé, on montre que l'image de f est l'ensemble des vecteurs dont les composantes sont égales.

c) On montre de la même manière que précédemment que g est une application linéaire. Son noyau est identique à celui de f, en revanche son image est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les composantes somment à 0.

d) La représentation de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$ est

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

tandis que celle de g est

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Solution de l'exercice 1.4 : Matrices Toeplitz

a) Pour toutes matrices de $\mathcal{T}^2$ $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_1 & t_2 \\ t_5 & t_4 & t_1 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_1 & u_2 \\ u_5 & u_4 & u_1 \end{bmatrix}$ et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $\lambda\boldsymbol{T} + \boldsymbol{U}$ est donnée

$$\begin{bmatrix} \lambda t_1 + u_1 & \lambda t_2 + u_2 & \lambda t_3 + u_3 \\ \lambda t_4 + u_4 & \lambda t_1 + u_1 & \lambda t_2 + u_2 \\ \lambda t_5 + u_5 & \lambda t_4 + u_4 & \lambda t_1 + u_1 \end{bmatrix},$$

qui est bien une matrice de Toeplitz, et par conséquent $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

b) Si $\boldsymbol{T}$ s'écrit $\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_1 & t_2 \\ t_5 & t_4 & t_1 \end{bmatrix}$, alors $\boldsymbol{T}$ représente l'endomorphisme $t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\forall \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad t(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 \\ t_4 x_1 + t_1 x_2 + t_2 x_3 \\ t_5 x_1 + t_4 x_2 + t_1 x_3 \end{bmatrix}.$$

c) Soit une matrice $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}$. Quelle application linéaire représente-t-elle dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

d)

(i) On procède de la même manière qu'en question a) en observant que $\lambda\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} \in \mathcal{C}$ pour toutes matrices $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ de $\mathcal{C}$ et pour tout réel $\mathbb{R}$.

(ii) L'application est injective : soit $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ tel que $f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{3\times 3}}$. Alors la première ligne de $f(\boldsymbol{c})$ est nulle, d'où $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ et $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

L'application est surjective : Pour toute matrice $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}$, on a $\boldsymbol{C} = f\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}\right)$.

Au final, on conclut que f est bijective.

Solution de l'exercice 1.5: Centrage de données

a) Il s'agit de vérifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour toutes matrices $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, on a $\overline{\lambda \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}} = \lambda \overline{\boldsymbol{X}} + \overline{\boldsymbol{Y}}$. Pour cela, on vérifie que pour tout $j = 1, \ldots, n$, on a

$$\mu_j(\lambda \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) = \lambda \mu_j(\boldsymbol{X}) + \mu_j(\boldsymbol{Y})$$

par linéarité des opérations matricielles.

b) Pour tout $j = 1, \ldots, n$, en notant $\{\bar{x}_i j\}$ les coefficients de $\overline{\boldsymbol{X}}$, on a :

$$\begin{aligned} \mu_j(\overline{\boldsymbol{X}}) &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij} - \mu_j(\boldsymbol{X})) \\ &= \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) - \mu_j(\boldsymbol{X}) \\ &= \mu_j(\boldsymbol{X}) - \mu_j(\boldsymbol{X}) = 0. \end{aligned}$$

c) **Application :** On considère la matrice de données $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 17 \\ 12 & 13 & 15 \\ 12 & 11 & 13 \end{bmatrix}$.

i) Calculer le vecteur moyen $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X})$ et la version centrée de cette matrice $\overline{\boldsymbol{X}}$.

ii) Le calcul donne

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

iii) La première colonne de $\overline{\boldsymbol{X}}$ est nulle, car $\mu_1(\boldsymbol{X}) = x_{i1}$ pour tout i. On voit alors que la première valeur ne différencie pas les individus.

iv) La seconde ligne de $\overline{\boldsymbol{X}}$ est nulle car $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X})$ est égale à (la transposée de) cette ligne. Le second individu est donc identique à l'individu moyen.