Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

Clément W. Royer

Notes de cours - DL2 IA/SO - 2024/2025

- La version la plus récente de ces notes se trouve à l'adresse :
  https://www.lamsade.dauphine.fr/~croyer/ensdocs/ALA/PolyALA.pdf.
- Pour tout commentaire, merci d'envoyer un mail à `clement.royer@lamsade.dauphine.fr`.
- **Historique du document**
  - 2024.09.04 : Première version avec chapitre de rappel.
- **Objectifs d'apprentissage**
  - Comprendre les principes derrière la réduction des endomorphismes en algèbre linéaire.
  - Savoir caractériser les propriétés des formes bilinéaires et quadratiques.
  - Définir la notion d'espace euclidien, et son implication sur l'étude des endomorphismes.
  - Appliquer ces techniques dans le contexte des sciences des données.

Sommaire

Avant-propos

Ce cours est une version adaptée du cours Algèbre linéaire 3 dispensé en Licence 2 à l'université Paris Dauphine-PSL, et en DL2 IA/SO lors de l'année 2023-2024.

Chapitre 1

Rappels d'algèbre linéaire

Ce chapitre vise à résumer les notions d'algèbre générale et linéaire qui seront supposées connues dans les chapitres qui suivent.

1.1 Notations préliminaires

Certaines notations suivent une nomenclature anglo-saxonne, suivant en cela la pratique de plus en plus répandue en sciences des données.

- L'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, \dots\}$ sera noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des entiers relatifs $\{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ sera noté $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des rationnels, qui s'écrivent sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}, q \geq 1$, sera noté $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble des réels sera noté $\mathbb{R}$. L'ensemble des réels positifs sera noté $\mathbb{R}_+$ et l'ensemble des réels strictement positifs sera noté $\mathbb{R}_{++}$.
- L'ensemble des nombres complexes, de la forme $a + i\,b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$, sera noté $\mathbb{C}$.

1.2 Scalaires et corps

Dans ce cours, on parlera de **scalaires** pour désigner principalement des nombres réels ou des nombres complexes, plus rarement des nombres rationnels. Les ensembles associés $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ ont en commun d'être des corps commutatifs, sur lesquels on définit des lois d'addition et de multiplication.

Définition 1.2.1 *Un ensemble G est appelé un groupe abélien, ou groupe commutatif, s'il est muni d'une loi $+ : G \times G \to G$ vérifiant les axiomes suivants :*

(i) Pour tous $(x, y, z) \in G^3$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité);

(ii) Pour tous $(x, y) \in G^2$, $x + y = y + x$ (commutativité);

(iii) Il existe un élément neutre $0_G \in G$ tel que $x + 0_G = 0_G + x$ pour tout $x \in G$;

(iv) Pour tout élément $x \in G$, il existe un inverse [1] *$y \in G$ tel que $x + y = y + x = 0_G$.*

Définition 1.2.2 *Un ensemble $\mathbb{K}$ est appelé un corps commutatif s'il est muni de deux lois $+$ et $*$ (notée $\cdot$) vérifiant les axiomes suivants:*

(i) $(\mathbb{K}, +)$ est un corps commutatif.

(ii) Pour tous $x, y \in \mathbb{K}^2$, $x * y = x\,y = y\,x \in \mathbb{K}$.

(iii) Il existe un élément neutre $1_{\mathbb{K}}$ pour la multiplication tel que $x\,1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}}\,x = x$ pour $x \in \mathbb{K}$.

(iv) Tout élément $x \in \mathbb{K}, x \neq 0_{\mathbb{K}}$ admet un inverse pour la multiplication, c'est-à-dire un élément $y \in \mathbb{K}$ tel que $x\,y = y\,x = 1_{\mathbb{K}}$.

Dans ce cours, on parlera d'un corps commutatif $\mathbb{K}$, qui sera en général soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

1.3 Espaces vectoriels et vecteurs

1.3.1 Généralités

On définit ici la notion d'espace vectoriel. Celle-ci est naturellement liée à l'existence d'un corps commutatif, que l'on appelle corps des scalaires dans ce contexte. On distingue ces scalaires (que l'on notera $a, b, c, \dots$) des éléments de l'espace, que l'on nomme vecteurs (et que l'on notera en gras dans ce polycopié : $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \dots$).

Définition 1.3.1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un ensemble non vide. L'ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel s'il existe une loi interne $+ : E \times E \to E$ et une loi externe $. : \mathbb{K} \times E \to E$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) L'ensemble E muni de la loi $+$ est un groupe abélien.

(ii) $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $1_{\mathbb{K}}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

(iii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $(\lambda + \mu).\boldsymbol{x} = \lambda.\boldsymbol{x} + \mu.\boldsymbol{x}$.

(iv) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $(\lambda\mu).\boldsymbol{x} = \lambda.(\mu.\boldsymbol{x})$.

(v) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E^2$, $\lambda.(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda.\boldsymbol{x} + \lambda.\boldsymbol{y}$.

Remarque 1.3.1 *Dans la suite, on omettra le . désignant la loi externe.*

Exemple 1.3.1
- *$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
- *$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
- *$\mathbb{R}^n$ (ensemble des vecteurs à $n \geq 1$ coordonnées) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Lorsque l'on considère $\mathbb{R}^n$ comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, on dit qu'on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure d'espace vectoriel canonique.

[1] On parlera d'opposé dans le cadre d'une loi notée $+$, et des groupes considérés dans la suite.

Remarque 1.3.2 *Selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, certains calculs ont un sens, d'autre non. Par exemple, en considérant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on a le droit d'écrire*

$$2 + i = (1 + i) \cdot [2 + i] + (-2i + 1)[1]$$

où les scalaires sont entre parenthèses et les vecteurs entre crochets. Un tel calcul n'est en revanche pas valide sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.3.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.3.2 *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'un ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si*

(i) $F \neq \emptyset$;

(ii) $\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in F^2$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in F$;

(iii) $\forall(\lambda, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{K} \times F$, $\lambda\boldsymbol{x} \in F$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel est un ensemble stable par addition et multiplication par un scalaire. À noter qu'un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 1.3.2
- *$\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
- *L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*

La proposition suivante donne des conditions pour vérifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, qui sont plus compactes à vérifier que celles de la définition.

Proposition 1.3.1 *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\emptyset \subsetneq F \subset E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) F *est un sous-espace vectoriel de* E;

(ii) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in F^2$, $\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y} \in F$;

(iii) $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in F^2$, $\lambda\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in F$.

Définition 1.3.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ m vecteurs de E.*

(i) On appelle combinaison linéaire de $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ tout vecteur de la forme $\sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{x}_i$, où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$.

(ii) L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ se note $\mathrm{vect}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$.

Proposition 1.3.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ m vecteurs de E. L'ensemble $\mathrm{vect}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, que l'on appelle le sous-espace engendré par les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$.*

1.4 Applications linéaires et matrices

Une fois la notion d'espace vectoriel bien établie, on peut définir des applications entre ces espaces. Pour certains espaces, ces applications peuvent être représentées (mathématiquement, mais aussi en machine) par des matrices.

1.4.1 Applications linéaires

Définition 1.4.1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une application $u : E \to F$ est une* application $\mathbb{K}$-linéaire, *ou en abrégé une* *application linéaire* *si*

$$\forall (\lambda, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{K} \times E^2, \qquad u(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x}) + u(\boldsymbol{y}) \quad \text{et} \quad u(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda u(\boldsymbol{x}). \tag{1.4.1}$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathcal{L}(E)$.

Les applications linéaires seront l'objet d'étude principal du chapitre 2. Les deux concepts qui suivent seront essentiels dans cette étude.

Définition 1.4.2 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.*

(i) Le **noyau** *de u, noté $\mathrm{Ker}(u)$, est l'ensemble*

$$\mathrm{Ker}(u) := \{\ \boldsymbol{x} \in E \mid u(\boldsymbol{x}) = 0_F\ \}.$$

*(ii) L'***image** *de u, notée $\mathrm{Im}(u)$, est l'ensemble*

$$\mathrm{Im}(u) := \{\ \boldsymbol{y} \in F \mid \exists \boldsymbol{x} \in E, u(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\ \}.$$

On parle parfois du noyau et de l'image comme de *sous-espaces fondamentaux*, ce qui est justifié par la proposition suivante.

Proposition 1.4.1 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.*

(i) L'ensemble $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) L'ensemble $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Définition 1.4.3 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.*

(i) On dit que u est une forme linéaire si $F = \mathbb{K}$.

(ii) On dit que u est un endomorphisme si $F = E$.

(iii) On dit que u est injective si $\mathrm{Ker}(u) = \{\mathbf{0}_E\}$.

(iv) On dit que u est surjective si $\mathrm{Im}(u) = F$.

(v) On dit que u est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Proposition 1.4.2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1.4.2 Dimension finie

On s'intéressera essentiellement dans ce cours aux espaces vectoriels qui peuvent être représentés de manière finie.

Définition 1.4.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. On considère l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i \boldsymbol{x}_i \end{array}$$

(i) La famille $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ est dite libre si l'application ϕ est injective, et liée sinon.

(ii) La famille $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ est dite génératice si l'application ϕ est surjective, ce qui équivaut à $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{vect}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = E$.

(iii) La famille $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ est appelée une base de E si ϕ est bijective.

Définition 1.4.5 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \in E^n$ est une base de E, on dit que l'espace E est de dimension finie égale à n, ou simplement de dimension n.*

Tout vecteur de E s'écrit alors comme une unique combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n \lambda_i \boldsymbol{x}_i$, et les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les coordonnées du vecteur dans la base.

Remarque 1.4.1 *S'il existe une base de E de taille n, alors toute base de E est formée par n vecteurs. Toute famille génératrice contient au moins n vecteurs.*

Dans certains espaces, certaines bases sont des choix naturels : on parle alors de base canonique. C'est le cas par exemple de $\mathbb{R}^n$, où la base canonique est donnée par les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

L'intérêt des espaces de dimension finie est qu'on peut alors représenter les applications linéaires par des matrices, c'est-à-dire des tableaux à deux entrées.

1.4.3 Matrices et lien avec les applications linéaires

Définition 1.4.6 *Une matrice $\boldsymbol{A}$ à m lignes et n colonnes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ est un tableau à double entrée, que l'on écrit*

$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

où $\{a_{ij}\}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.

L'ensemble des matrices avec m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{m \times n}$.

Proposition 1.4.3 *L'ensemble $\mathbb{K}^{m \times n}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Notation 1.4.1 *Dans le reste de ce cours, on notera les matrices avec des lettres majuscules en gras* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \dots)$*.*

Les matrices peuvent être utilisées à de nombreux effets, notamment pour représenter les applications linéaires en dimension finie.

Théorème 1.4.1 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions respectives* n *et* m*. Soient* $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ *une base de* E*,* $(\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n)$ *une base de* F *et* $u \in \mathcal{L}(E, F)$*.*

La représentation de u *dans les bases* $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ *et* $(\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m)$ *est donnée par la matrice* $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m \times n}$*, où les coefficients vérifient*

$$\forall j = 1, \dots, n, \qquad u(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \boldsymbol{f}_i.$$

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes

Chapitre 3

Formes bilinéaires et quadratiques

Chapitre 4

Espaces euclidiens

Bibliographie

[1] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Introduction to Applied Linear Algebra - Vectors, Matrices and Least Squares*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2018.

[2] V. Divol. Algèbre linéaire 3. Polycopié de cours, Université Paris-Dauphine, 2023–2024.

[3] E. Ramis, C. Deschamps, and J. Odoux. *Le cours de mathématiques*. Dunod, 2001.

[4] G. Strang. *Linear Algebra and Learning from Data*. Wellesley-Cambridge Press, 2019.