Algèbre linéaire et applications aux sciences des données

DL2 IA/SO

Partiel - 28 octobre 2024

Dauphine | PSL — UNIVERSITÉ PARIS

Durée : 1 heure 30.
Documents autorisés : Une feuille A4 recto-verso de notes manuscrites ou imprimées.
Contenu : Quatre exercices.
Les exercices sont indépendants. Il n'est pas nécessaire de les rendre sur des copies séparées. Si les étudiant(e)s pensent constater une erreur dans l'une des questions, ils sont invité(e)s à l'indiquer explicitement sur leur copie, et à poursuivre en tenant compte de cette erreur.

Exercice 1 : Endomorphismes

On considère l'endomorphisme $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\forall\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad u\left(\boldsymbol{x}\right) = \begin{bmatrix} \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \end{bmatrix}$$

a) Donner la représentation de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que le noyau de u contient un vecteur non nul.
Quelle propriété liée aux valeurs propres de u cela implique-t-il ?

c) Expliquer pourquoi u ne peut pas posséder trois valeurs propres nulles.

d) Écrire la représentation de u dans la base $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$, où

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Que peut-on déduire de cette représentation ?

Exercice 2 : Valeurs propres

Soit la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Pourquoi est-il clair que 1 est valeur propre de $\boldsymbol{A}$?

b) Calculer le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$.

c) La matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable en tant que matrice de $\mathbb{R}^{3\times 3}$? Justifier.

d) La matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable en tant que matrice de $\mathbb{C}^{3\times 3}$? Justifier.

Exercice 3 : Polynômes de matrices

Soit une matrice $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $\boldsymbol{M}^2 - 4\boldsymbol{I}_3$ soit annulateur de $\boldsymbol{M}$.

a) Le polynôme $X^2 - 4$ est-il le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{M}$? Justifier.

b) Pour chacune des propriétés suivantes, donner un exemple de matrice $\boldsymbol{M}$ vérifiant cette propriété (en plus de celle plus haut) :

   i) Le polynôme minimal de $\boldsymbol{M}$ est $X - 2$.
   ii) Le polynôme $(X + 2)^3$ est annulateur.
   iii) Le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{M}$ est $(X + 2)(X - 2)^2$.

Exercice 4 : Le placement des 1

Soient les matrices $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Justifier sans calcul que $\boldsymbol{B}$ est trigonalisable.

b) Calculer le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{B}$, noté $\chi_{\boldsymbol{B}}$.

c) Donner la dimension du sous-espace $\ker(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}_4)$, et une base du sous-espace associé.

d) Montrer que $\boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$.

e) En déduire la valeur du polynôme minimal de $\boldsymbol{B}$, noté $\pi_{\boldsymbol{B}}$.

f) La matrice $\boldsymbol{B}$ est-elle diagonalisable ?

g) Justifier que $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{B}$ ont mêmes valeurs propres avec même ordre de multiplicité algébrique.

h) Montrer en revanche que le polynôme minimal de $\boldsymbol{C}$ n'est pas égal à celui de $\boldsymbol{B}$.

i) Justifier alors que $\boldsymbol{C}$ est égale à sa forme de Jordan.

Solution de l'exercice 1 : Endomorphismes

On considère l'endomorphisme $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\forall\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad u\left(\boldsymbol{x}\right) = \begin{bmatrix} \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \end{bmatrix}$$

a) La représentation de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) En considérant l'équation $u(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, qui correspond au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{x_1+x_2+x_3}{3} & = & 0 \\ \frac{x_1+x_2+x_3}{3} & = & 0 \\ \frac{x_1+x_2+x_3}{3} & = & 0, \end{array} \right.$$

on voit que ce système ne consiste qu'en une seule équation, dont le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est une solution. Il existe donc un vecteur non nul dans le noyau de u, ce qui implique que 0 est valeur propre de u.

c) Le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre 1. Comme u a au plus 3 valeurs propres, il en ressort que u ne peut pas avoir trois valeurs propres nulles.

d) La représentation de u dans la base $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ est donnée par les coordonnées de $(u(\boldsymbol{v}_1), u(\boldsymbol{v}_2), u(\boldsymbol{v}_3))$ dans la base, soit

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il en résulte que u est diagonalisable.

Solution de l'exercice 2 : Valeurs propres

Soit la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Si $\boldsymbol{e}_1$ désigne le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$. Par conséquent, 1 est valeur propre de $\boldsymbol{A}$.

b) Un calcul de déterminant donne

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A} - X\boldsymbol{I}_3) &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -8 & 4-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= -X \begin{vmatrix} 4-X & 0 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= -X(4-X)(1-X) + 8(1-X) \\
&= (1-X)(-4X + X^2 + 8).
\end{aligned}$$

c) Le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, car il ne possède qu'une racine réelle. La matrice $\boldsymbol{A}$ n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

d) Le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$ est en revanche scindé dans $\mathbb{C}$, car

$$(1-X)(8-4X+X^2) = -(X-1)(X-2-2i)(X-2+2i).$$

Comme les racines de ce polynôme sont distinctes, on sait que la matrice $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable.

Solution de l'exercice 3 : Polynômes de matrices

a) Le polynôme $X^2 - 4$ est de degré 2, tandis que le polynôme caractéristique est nécessairement de degré 3.

b) i) $\boldsymbol{M} = 2\boldsymbol{I}_3$ a pour polynôme minimal $X - 2$ et $X^2 - 4 = (X+2)(X-2)$ est annulateur.

ii) Si $\boldsymbol{M} = -2\boldsymbol{I}_3$, les polynômes $X^2 - 4$ et $(X+2)^3$ sont tous les deux annulateurs.

iii) La matrice $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(X+2)(X-2)^2$, et $X^2 - 4$ est le polynôme minimal de cette matrice, donc annulateur.

Solution de l'exercice 4 : Le placement des 1

Soient les matrices $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) La matrice $\boldsymbol{B}$ est triangulaire, elle est donc trivialement trigonalisable.

b) On a

$$\begin{aligned}
\chi_{\boldsymbol{B}}(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)\begin{vmatrix} -X & 0 & 0 \\ 0 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} \\
&= -X^3(1-X).
\end{aligned}$$

c) Comme 1 est racine simple du polynôme caractéristique, le sous-espace $\ker(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}_4)$ est de dimension 1. En regardant l'expression de $\boldsymbol{B}$, on voit que $\boldsymbol{e}_1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 : il définit donc une base du sous-espace associé.

d) Par le calcul, on obtient bien que $\boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$.

e) On sait que $\chi_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^3(\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}$ par le théorème de Cayley-Hamilton. Par ailleurs, la question précédente donne

$$\boldsymbol{B}^3(\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{B}).$$

Comme ni X ni $1 - X$ ne sont annulateurs de $\boldsymbol{B}$ et que le polynôme minimal divise $\chi_{\boldsymbol{B}}$, on obtient que $\pi_{\boldsymbol{B}}(X) = X(X-1)$.

f) Le polynôme minimal de $\boldsymbol{B}$ est scindé à racines simples, donc la matrice $\boldsymbol{B}$ est diagonalisable.

g) Cela peut se justifier par un calcul de polynôme caractéristique, ou en notant que $\boldsymbol{C}$ est triangulaire avec ses valeurs propres sur sa diagonale. On voit ainsi que $\chi_{\boldsymbol{C}} = \chi_{\boldsymbol{B}}$.

h) En calculant les puissances de $\boldsymbol{C}$, on voit que $\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{C}^3 \neq \boldsymbol{0}$, d'où $\chi_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}^2(\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{C})$. Comme ni X, ni X^2, ni $X(1-X)$ ne sont annulateurs, on en déduit que $\pi_{\boldsymbol{C}}(X) = X^2(X-1)$.

i) La structure du polynôme minimal implique que la forme de Jordan de $\boldsymbol{C}$ est

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 + 1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_1 \end{bmatrix},$$

avec $\boldsymbol{J}_1 = [0] \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ et $\boldsymbol{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. On voit ainsi que $\boldsymbol{C}$ est bien égale à sa forme de Jordan (*NB : Stricto sensu on devrait parler d'une forme de Jordan, car on aurait pu permuter le bloc associé à la valeur propre 1 et ceux associés aux valeurs propres nulles.*)