Résolution de problèmes de tournées par branch-and-price

Dominique Feillet
Ecole des Mines de Saint-Etienne (site de Gardanne)

Juin 2011

cf 4OR, volume 8(4), 2010

Plan

- Introduction
- Principe
- Sous-problème
- Qualité de la borne / branch-and-price-and-cut
- Quelques points d'implémentation

Introduction

Problèmes de tournées de véhicules avec fenêtres de temps

- Etant donné
  - Un graphe G=(V,A)
  - $V = \{v_0,\ldots,v_n\}$ (v_0 : dépôt ; $v_1,\ldots,v_n$: clients)
  - Coût c_{ij} et durée t_{ij} pour tout arc $(v_i,v_j) \in A$
  - Demande d_i, fenêtre de temps $[a_i,b_i]$, temps de service st_i pour tout client $v_i \in \{v_1,\ldots,v_n\}$
  - Flotte de U véhicules de capacité Q

Problèmes de tournées de véhicules avec fenêtres de temps

- Trouver un ensemble de U routes de coût minimum visitant tous les clients et respectant les contraintes de capacité et les fenêtres de temps

- Hypothèses, notations supplémentaires
  - $t_{ij} = c_{ij}$ pour tout arc $(v_i,v_j) \in A$; les coûts respectent l'inégalité triangulaire
  - $d_0 = st_0 = 0$; horizon de temps $[a_0,b_0]$; $b_i + st_i + t_{ij} <= b_0$ pour tout sommet $v_i \in \{v_1,\ldots,v_n\}$

Modèle classique

$$\text{minimize} \sum_{1 \le u \le U} \sum_{(v_i, v_j) \in A} c_{ij} x_{ij}^u \tag{1.1}$$

subject to

$$\sum_{1 \le u \le U} \sum_{\{v_j \in V | (v_i, v_j) \in A\}} x_{ij}^u \ge 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}), \tag{1.2}$$

$$\sum_{\{v_j \in V | (v_i, v_j) \in A\}} x_{ij}^u - \sum_{\{v_j \in V | (v_j, v_i) \in A\}} x_{ji}^u = 0 \qquad (v_i \in V, 1 \le u \le U), \tag{1.3}$$

$$\sum_{\{v_i \in V | (v_0, v_i) \in A\}} x_{0i}^u \le 1 \qquad (1 \le u \le U), \tag{1.4}$$

$$\sum_{(v_i, v_j) \in A} d_i x_{ij}^u \le Q \qquad (1 \le u \le U), \tag{1.5}$$

$$s_i^u + st_i + c_{ij} - s_j^u + M x_{ij}^u \le M \qquad ((v_i, v_j) \in A, v_j \ne v_0, 1 \le u \le U), \tag{1.6}$$

$$s_i^u + st_i + c_{i0} - b_0 + M x_{i0}^u \le M \qquad ((v_i, v_0) \in A, 1 \le u \le U), \tag{1.7}$$

$$a_i \le s_i^u \le b_i \qquad (v_i \in V, 1 \le u \le U), \tag{1.8}$$

$$x_{ij}^u \in \{0, 1\} \qquad ((v_i, v_j) \in A, 1 \le u \le U), \tag{1.9}$$

Modèle de type couverture

- $\Omega = \{r_1, \ldots, r_{|\Omega|}\}$: ensemble de toutes les routes réalisables
  - c_k : coût de la route r_k ; $a_{ik} = 1$ si la route r_k visite v_i, 0 sinon
- Variables : $\theta_k = 1$ si la route r_k est sélectionnée, 0 sinon

$$\text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega} c_k \theta_k$$

subject to

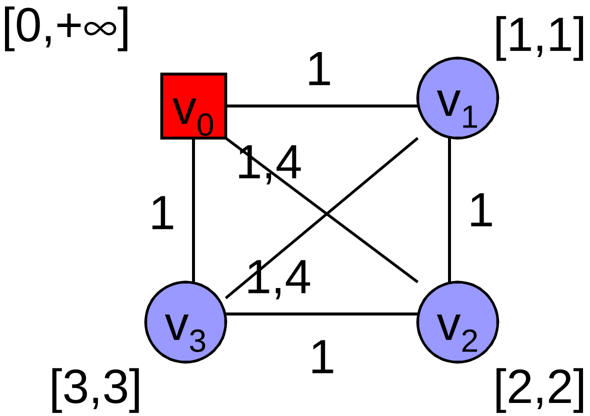
$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} \theta_k \geq 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}),$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} \theta_k \leq U,$$

$$\theta_k \in \mathbb{N} \qquad (r_k \in \Omega).$$

Modèle de type couverture

- Exemple



$d_i = 1$, $st_i = 0$

$Q = +\infty$

$U = +\infty$

$\Omega = \{r_1, \ldots, r_7\}$ avec :

$r_1 = (v_0, v_1, v_0)$

$r_2 = (v_0, v_2, v_0)$

$r_3 = (v_0, v_3, v_0)$

$r_4 = (v_0, v_1, v_2, v_0)$

$r_5 = (v_0, v_1, v_3, v_0)$

$r_6 = (v_0, v_2, v_3)$

$r_7 = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$

Min $2\theta_1 + 2{,}8\theta_2 + 2\theta_3 + 3{,}4\theta_4 + 3{,}4\theta_5 + 3{,}4\theta_6 + 4\theta_7$

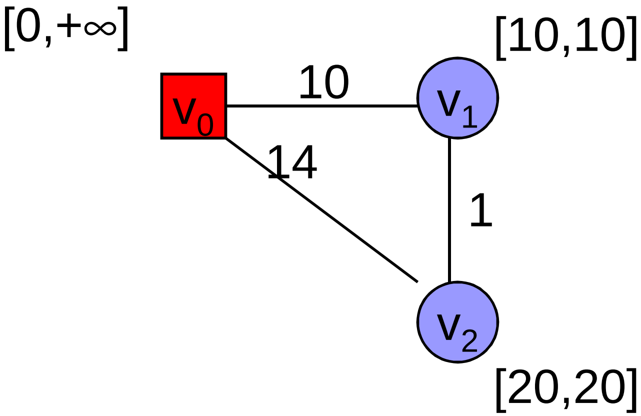
sujet à

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_7 \geq 1 \\ \theta_2 + \theta_4 + \theta_6 + \theta_7 \geq 1 \\ \theta_3 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7 \geq 1 \\ \theta_1, \ldots, \theta_7 \text{ entiers} \end{cases}$$

Solution optimale de coût 4 ($\theta_7 = 1$)

Motivation pour utiliser le modèle de couverture

- Exemple

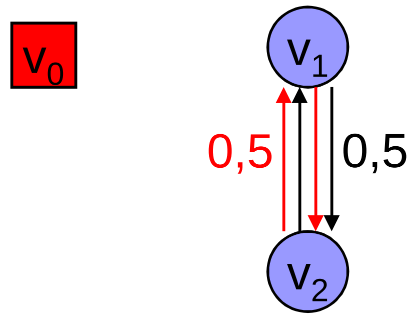


$d_i = 1$, $st_i = 0$
$Q = +\infty$
$U = +\infty$

Exemple de solution relaxée (modèle 1) de coût 2

$x^1_{12}=x^1_{21}=0{,}5$
$x^2_{12}=x^2_{21}=0{,}5$

$s^1_1=10$, $s^1_2=20$,
$s^2_1=10$, $s^2_2=20$



Min $20\theta_1 + 28\theta_2 + 25\theta_3$
sujet à

$$\begin{cases} \theta_1 + \qquad\qquad \theta_3 \geq 1 \\ \qquad \theta_2 + \quad \theta_3 \geq 1 \\ \theta_1, \ldots, \theta_3 \geq 0 \end{cases}$$

Relaxation linéaire du modèle de couverture

Solution optimale de coût 25 ($\theta_3 = 1$)

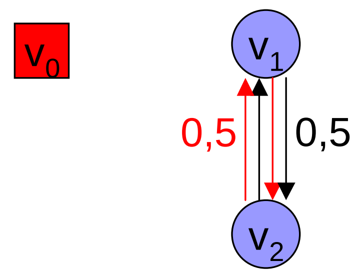
Motivation pour utiliser le modèle de couverture

$$\text{minimize} \sum_{1 \le u \le U} \ldots$$

Exemple de solution relaxée (modèle 1) de coût 2

$x^1_{12}=x^1_{21}=0{,}5$
$x^2_{12}=x^2_{21}=0{,}5$

$s^1_1=10$, $s^1_2=20$,
$s^2_1=10$, $s^2_2=20$



subject to

$$\sum_{1 \le u \le U} \sum_{\{v_j \in V | (v_i,v_j) \in A\}} x^u_{ij} \ge 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}), \tag{1.2}$$

$$\sum_{\{v_j \in V | (v_i,v_j) \in A\}} x^u_{ij} - \sum_{\{v_j \in V | (v_j,v_i) \in A\}} x^u_{ji} = 0 \qquad (v_i \in V, 1 \le u \le U), \tag{1.3}$$

$$\sum_{\{v_i \in V | (v_0,v_i) \in A\}} x^u_{0i} \le 1 \qquad (1 \le u \le U), \tag{1.4}$$

$$\sum_{(v_i,v_j) \in A} d_i x^u_{ij} \le Q \qquad (1 \le u \le U), \tag{1.5}$$

$$s^u_i + st_i + c_{ij} - s^u_j + M x^u_{ij} \le M \qquad ((v_i,v_j) \in A, v_j \ne v_0, 1 \le u \le U), \tag{1.6}$$

$$s^u_i + st_i + c_{i0} - b_0 + M x^u_{i0} \le M \qquad ((v_i,v_0) \in A, 1 \le u \le U), \tag{1.7}$$

$$a_i \le s^u_i \le b_i \qquad (v_i \in V, 1 \le u \le U), \tag{1.8}$$

$$x^u_{ij} \in \{0,1\} \qquad ((v_i,v_j) \in A, 1 \le u \le U), \tag{1.9}$$

Décomposition de Dantzig-Wolfe

- Le modèle 2 est obtenu du modèle 1 par décomposition de Dantzig-Wolfe

$$\text{minimize} \sum_{1 \le u \le U} \sum_{(v_i,v_j) \in A} c_{ij} x_{ij}^u \qquad (1.1)$$

subject to

$$\sum_{1 \le u \le U} \sum_{\{v_j \in V | (v_i,v_j) \in A\}} x_{ij}^u \ge 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}), \qquad (1.2)$$

$$\sum_{\{v_j \in V | (v_i,v_j) \in A\}} x_{ij}^u - \sum_{\{v_j \in V | (v_j,v_i) \in A\}} x_{ji}^u = 0 \qquad (v_i \in V, 1 \le u \le U), \qquad (1.3)$$

$$\sum_{\{v_i \in V | (v_0,v_i) \in A\}} x_{0i}^u \le 1 \qquad (1 \le u \le U), \qquad (1.4)$$

$$\sum_{(v_i,v_j) \in A} d_i x_{ij}^u \le Q \qquad (1 \le u \le U), \qquad (1.5)$$

$$s_i^u + st_i + c_{ij} - s_j^u + M x_{ij}^u \le M \qquad ((v_i,v_j) \in A, v_j \ne v_0, 1 \le u \le U), \qquad (1.6)$$

$$s_i^u + st_i + c_{i0} - b_0 + M x_{i0}^u \le M \qquad ((v_i,v_0) \in A, 1 \le u \le U), \qquad (1.7)$$

$$a_i \le s_i^u \le b_i \qquad (v_i \in V, 1 \le u \le U), \qquad (1.8)$$

$$x_{ij}^u \in \{0,1\} \qquad ((v_i,v_j) \in A, 1 \le u \le U), \qquad (1.9)$$

Minimiser les coûts de transport

Tous les clients doivent être servis

Ensemble de combinaisons d'au plus U routes réalisables (= Ω^U)

$$\text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega} c_k \theta_k$$

subject to

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} \theta_k \ge 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}),$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} \theta_k \le U,$$

$$\theta_k \subset \mathbb{N} \qquad (r_k \subset \Omega).$$

Principe

Principe

- Considérons la relaxation linéaire du modèle 2
  - Appelé PROBLEME MAITRE
- Considérons la restriction du problème maître à un sous-ensemble Ω_1 de variables
  - Appelé PROBLEME MAITRE RESTREINT (PMR)

$$(MP(\Omega_1)) \qquad \text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega_1} c_k \theta_k$$

subject to

$$\sum_{r_k \in \Omega_1} a_{ik} \theta_k \geq 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}),$$

$$\sum_{r_k \in \Omega_1} \theta_k \leq U,$$

$$\theta_k \geq 0 \qquad (r_k \in \Omega_1).$$

Principe

- Considérons le dual du problème maître restreint
  - Egal au dual du problème maître si $\Omega_1 = \Omega$

$$(D(\Omega_1)) \qquad \text{maximize} \sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} \lambda_i + U \times \lambda_0$$

subject to

$$\sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} a_i^k \lambda_i + \lambda_0 \leq c_k \qquad (r_k \in \Omega_1),$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}),$$

$$\lambda_0 \leq 0.$$

- Remarque : l'ajout d'une variable dans MP(Ω_1) induit l'ajout d'une contrainte dans D(Ω_1)

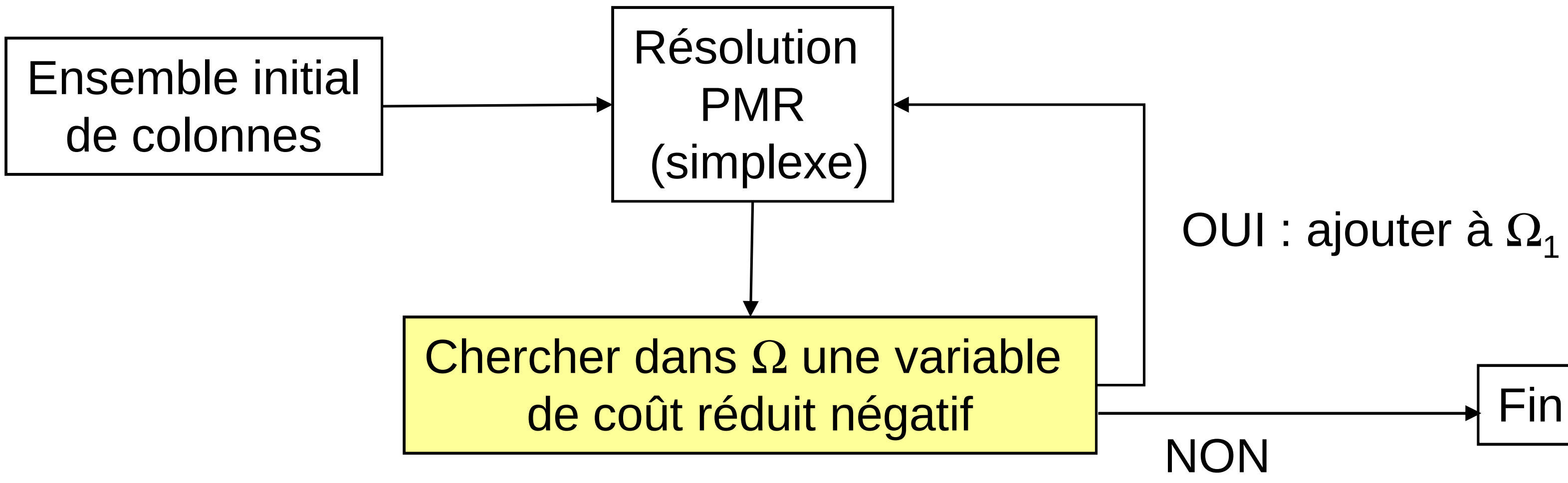
Principe

- Coût réduit d'une variable du problème maître :

$$c_k - \sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} a_i^k \lambda_i - \lambda_0$$

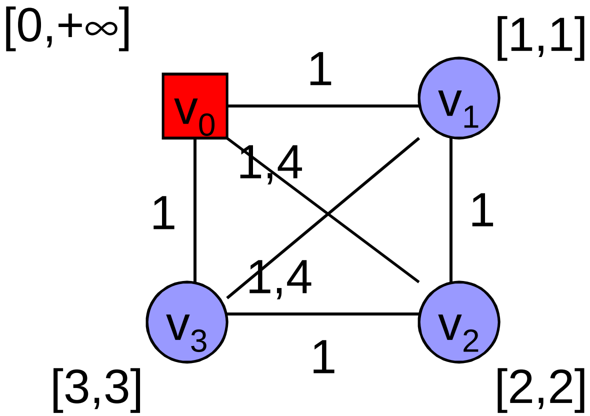
  - pour une variable, avoir un coût réduit négatif revient à ce que la contrainte duale correspondante soit non-réalisable

Principe


Ensemble initial de colonnes
Résolution PMR (simplexe)
OUI : ajouter à Ω_1
Chercher dans Ω une variable de coût réduit négatif
Fin
NON

Illustration

- Retour à l'exemple précédent (initialisation et itération1)



$d_i = 1$, $st_i = 0$
$Q = +\infty$
$U = +\infty$

$\Omega_1 = \{r_1, r_2, r_3\}$ avec $r_1=(v_0,v_1,v_0)$, $r_2=(v_0,v_2,v_0)$, $r_3=(v_0,v_3,v_0)$

Min $2\theta_1 + 2{,}8\theta_2 + 2\theta_3$
sujet à

$$\begin{cases} \theta_1 & & & \geq 1 \\ & \theta_2 & & \geq 1 \\ & & \theta_3 & \geq 1 \\ \theta_1,\ldots,\theta_3 \geq 0 \end{cases}$$

Max $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
sujet à

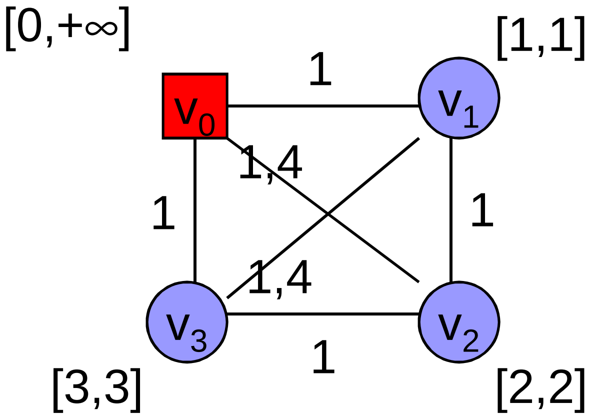
$$\begin{cases} \lambda_1 & & & \leq 2 \\ & \lambda_2 & & \leq 2{,}8 \\ & & \lambda_3 & \leq 2 \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale (coût = 6,8)
$\theta=(1;\ 1;\ 1)$
$\lambda=(2;\ 2{,}8;\ 2)$

Par exemple, (v_0,v_1,v_2,v_0) de coût réduit négatif :
coût réduit = 3,4 - 2 - 2,8 = -1,4

Illustration

- Retour à l'exemple précédent (itération 2)



$d_i = 1$, $st_i = 0$
$Q = +\infty$
$U = +\infty$

$\Omega_1 = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ avec $r_4 = (v_0, v_1, v_2, v_0)$

Min $2\theta_1 + 2{,}8\theta_2 + 2\theta_3 + \mathbf{3{,}4\theta_4}$
sujet à

$$\begin{cases} \theta_1 \qquad\qquad + \theta_4 \ge 1 \\ \qquad \theta_2 \qquad + \theta_4 \ge 1 \\ \qquad\qquad \theta_3 \qquad \ge 1 \\ \theta_1, \ldots, \theta_3, \theta_4 \ge 0 \end{cases}$$

Max $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
sujet à

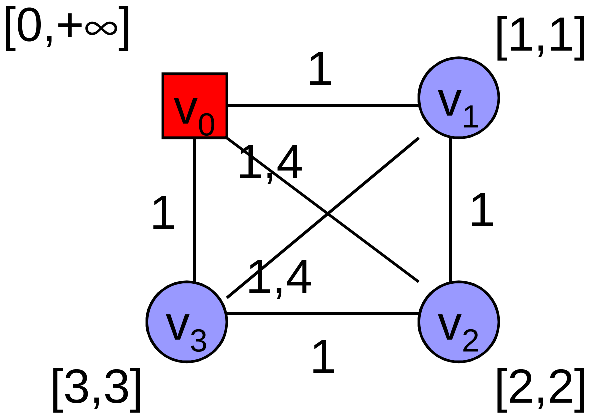
$$\begin{cases} \lambda_1 \qquad\qquad \le 2 \\ \qquad \lambda_2 \qquad \le 2{,}8 \\ \qquad\qquad \lambda_3 \le 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \le 3{,}4 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_3 \ge 0 \end{cases}$$

Solution optimale (coût = 5,4)
$\theta = (0; 0; 1; 1)$
$\lambda = (2; 1{,}4; 2)$ par exemple

Par exemple, $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ de coût réduit négatif :
coût réduit = 4 - 2 - 1,4 - 2 = -1,4

Illustration

- Retour à l'exemple précédent (itération 3)



$d_i = 1$, $st_i = 0$
$Q = +\infty$
$U = +\infty$

$\Omega_1 = \{r_1,r_2,r_3,r_4,r_5\}$ avec $r_5 = (v_0,v_1,v_2,v_3,v_0)$

Min $2\theta_1 + 2{,}8\theta_2 + 2\theta_3 + 3{,}4\theta_4 \mathbf{+4\theta_5}$
sujet à

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_4 + \theta_5 \geq 1 \\ \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 \geq 1 \\ \theta_3 + \theta_5 \geq 1 \\ \theta_1,\dots,\theta_3,\theta_4,\theta_5 \geq 0 \end{cases}$$

Max $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
sujet à

$$\begin{cases} \lambda_1 \leq 2 \\ \lambda_2 \leq 2{,}8 \\ \lambda_3 \leq 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 3{,}4 \\ \boldsymbol{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 4} \\ \lambda_1,\dots,\lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale (coût = 4)
$\theta=(0; 0; 0; 0; 1)$
$\lambda=(1; 2; 1)$ par exemple

Aucune route réalisable n'est de coût réduit négatif
-> la solution est optimale pour le problème maître

Principe

- L'algorithme est fini
  - Une colonne présente dans Ω_1 a un coût réduit positif ou nul
  - Le nombre de colonnes de Ω est fini

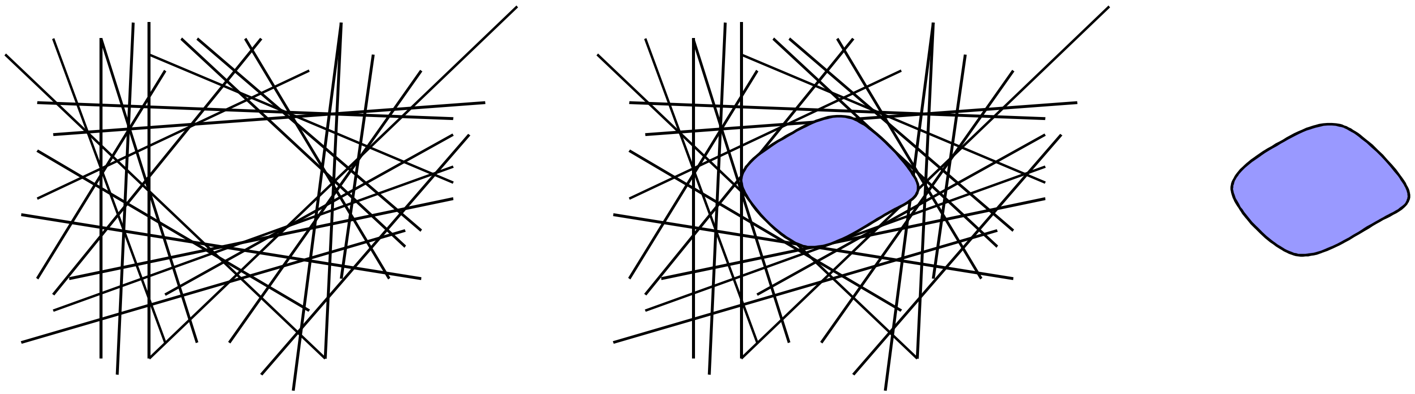
- Remarque
  - On parle de manière équivalente de colonne, variable et route

Principe

- Autre point de vue (1) :
  - Notons $z^*(\Omega_1)$ et $y^*(\Omega_1)$ les coûts des solutions optimales des programmes primal et dual restreints
    - $z^*(\Omega_1)= y^*(\Omega_1)$
  - Notons $z^*(\Omega)$ et $y^*(\Omega)$ les coûts des solutions optimales des programmes complets
    - $z^*(\Omega)= y^*(\Omega)$
  - Le but est de calculer $z^*(\Omega)$
    - $y^*(\Omega) \leq y^*(\Omega_1)$
  - A chaque itération on cherche s'il existe une contrainte duale non satisfaite
    - si c'est le cas, on remonte la variable correspondante
    - sinon, la solution est réalisable pour $D(\Omega)$, donc $y^*(\Omega) = y^*(\Omega_1)$, mais $y^*(\Omega) = z^*(\Omega)$ donc le résultat recherché est obtenu

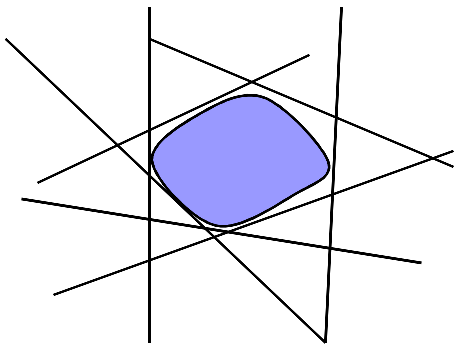
Principe

- Autre point de vue (2) :
  - La résolution du programme dual, avec son très grand nombre de contraintes, peut s'aborder comme la résolution d'un programme non linéaire par la méthode de Kelley

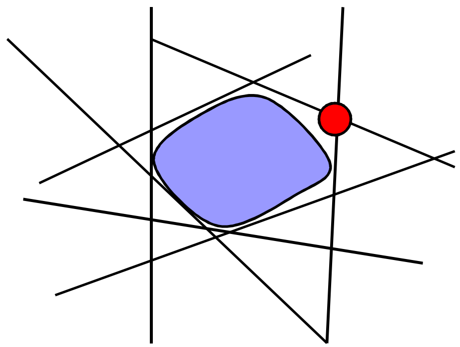


Principe

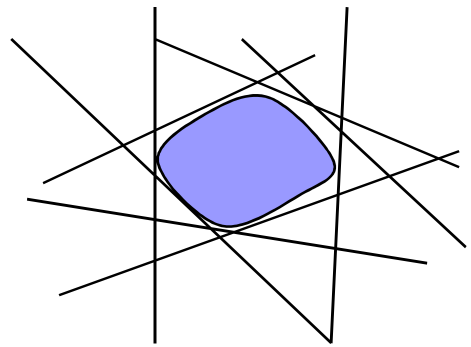
- Autre point de vue (2) :
  - Méthode de Kelley
    - Initier la résolution avec un polyèdre contenant le domaine réalisable du programme non-linéaire
    - Trouver un point extrême optimal (simplexe) ; s’il n’est pas réalisable pour le programme non-linéaire, le supprimer du domaine par l’ajout d’une coupe et répéter



Polyèdre courant

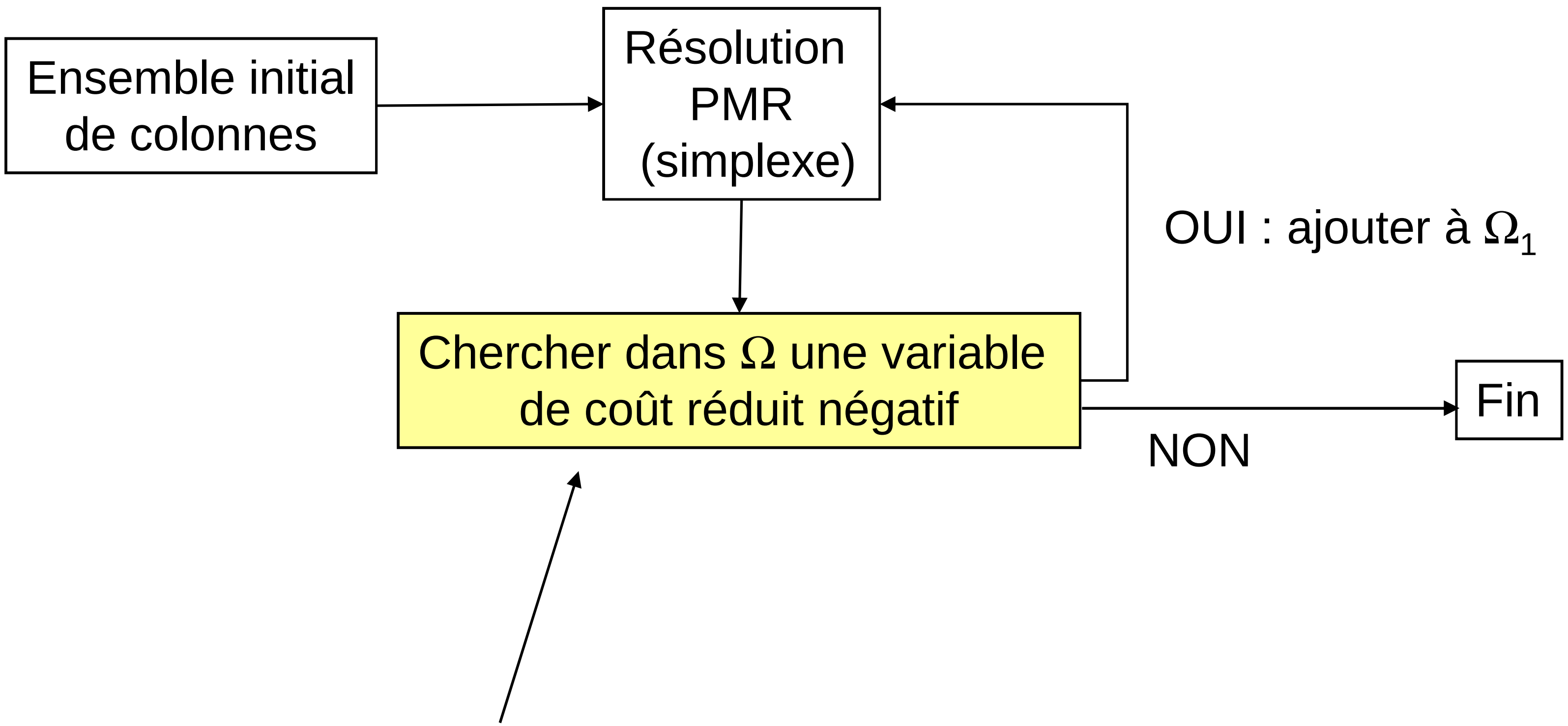


Solution optimale sur le polyèdre



Ajout d’une coupe

Principe



Sous-problème

(ou problème esclave, ou oracle, ou problème de pricing)

Définition du sous-problème

- Le sous-problème cherche un élément de Ω tel que

$$c_k - \sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} a_i^k \lambda_i - \lambda_0 < 0.$$

soit, en notant b^k_{ij} = 1 si le chemin r_k utilise l'arc (v_i,v_j), 0 sinon

$$\sum_{(v_i,v_j) \in A} b_{ij}^k (c_{ij} - \lambda_i) < 0.$$

Définition du sous-problème

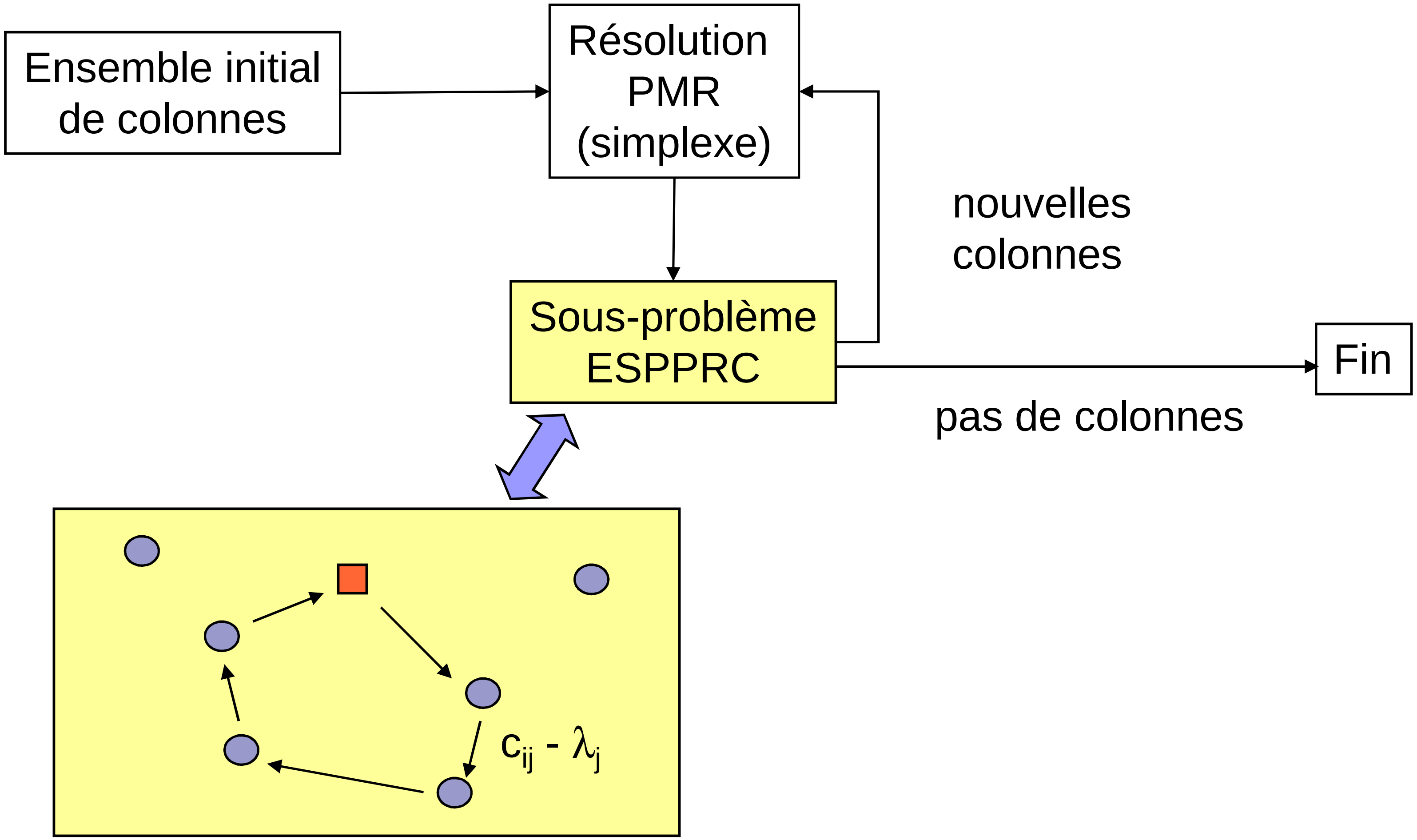
- Pour cela, on cherche l'élément de Ω minimisant cette valeur
  - C'est un problème d'optimisation combinatoire
  - Trouver le chemin de v_0 à v_0, passant au plus une fois par chaque sommet, respectant la contrainte de capacité et les fenêtres de temps, et minimisant

$$\sum_{(v_i,v_j)\in A} b_{ij}^k (c_{ij} - \lambda_i)$$

  - Il s'agit d'un Problème de Plus Court Chemin Elémentaire avec Contraintes de Ressources, le coût des arcs (v_i,v_j) étant $c_{ij} - \lambda_j$
  - Ce problème est NP-dur au sens fort mais peut être résolu par programmation dynamique

Définition du sous-problème

- Principe



Politique de branchement

- A chaque nœud de l’arbre de recherche, le calcul de la borne inférieure fait appel à la génération de colonnes…
- Si la solution obtenue est fractionnaire (et la borne inférieure plus basse que la meilleure solution connue), il faut brancher
- Utiliser un branchement sur les variables ?
  - Trouver r_k tel que $0 < \theta_k < 1$
  - Définir un fils pour lequel $\theta_k = 0$ et un fils pour lequel $\theta_k = 1$

Politique de branchement

- Utiliser un branchement sur les variables ?
  - Fils $\theta_k = 0$
    - Problème maître : supprimer r_k de Ω_1
    - Sous-problème : chercher une route de coût réduit négatif dans $\Omega \backslash \{r_k\}$
  - Fils $\theta_k = 1$
    - Problème maître : fixer $\theta_k = 1$, supprimer de Ω les routes visitant des sommets présent dans r_k
    - Sous-problème : supprimer les sommets présents dans r_k
    - Revient en fait à continuer sur une instance de taille réduite…

- Difficultés
  - Chercher une route de coût réduit négatif dans $\Omega \backslash \{r_k\}$
    - possible avec une approche de recherche de k-meilleurs chemins mais lourd ; possible en adaptant le graphe (Irnich et Desaulniers 2005)
  - Déséquilibre de l'arbre

Politique de branchement

- Principe couramment admis : utiliser les variables de la formulation initiale
  - Choisir un arc traversé par un flot x_{ij} fractionnaire (on peut montrer que si la solution est fractionnaire un tel arc existe)

$$x_{ij} = \sum_{r_k \in \Omega_1} b_{ij}^k \theta_k = \sum_{1 \leq u \leq U} x_{ij}^u$$

  - Définir un fils dans lequel $x_{ij} = 0$ et un fils dans lequel $x_{ij} = 1$
  - Fils $x_{ij} = 0$
    - Problème maître : supprimer toutes les routes traversant (v_i,v_j)
    - Sous-problème : supprimer l'arc (v_i,v_j)
  - Fils $x_{ij} = 1$
    - Problème maître : supprimer toutes les routes traversant un arc (v_i,v_k) ou un arc (v_k,v_j) avec $v_k \neq v_j$
    - Sous-problème : supprimer tout arc (v_i,v_k) et (v_k,v_j) avec $v_k \neq v_j$

Autres atouts de la méthode

- Forte généricité
  - La conception se limite généralement à définir les ressources du sous-problème
    - contraintes de précédence
    - contraintes de couplage
  - Eventuellement, il faut utiliser plusieurs sous-problèmes
    - multi-dépôt
    - plusieurs types de véhicules
- Adaptée à une utilisation heuristique
  - Résolution heuristique des sous-problèmes
  - Fixation de variables, Branch and Bound sur les colonnes générées à la racine
  - Hybridation avec des metaheuristiques (matheuristiques)…

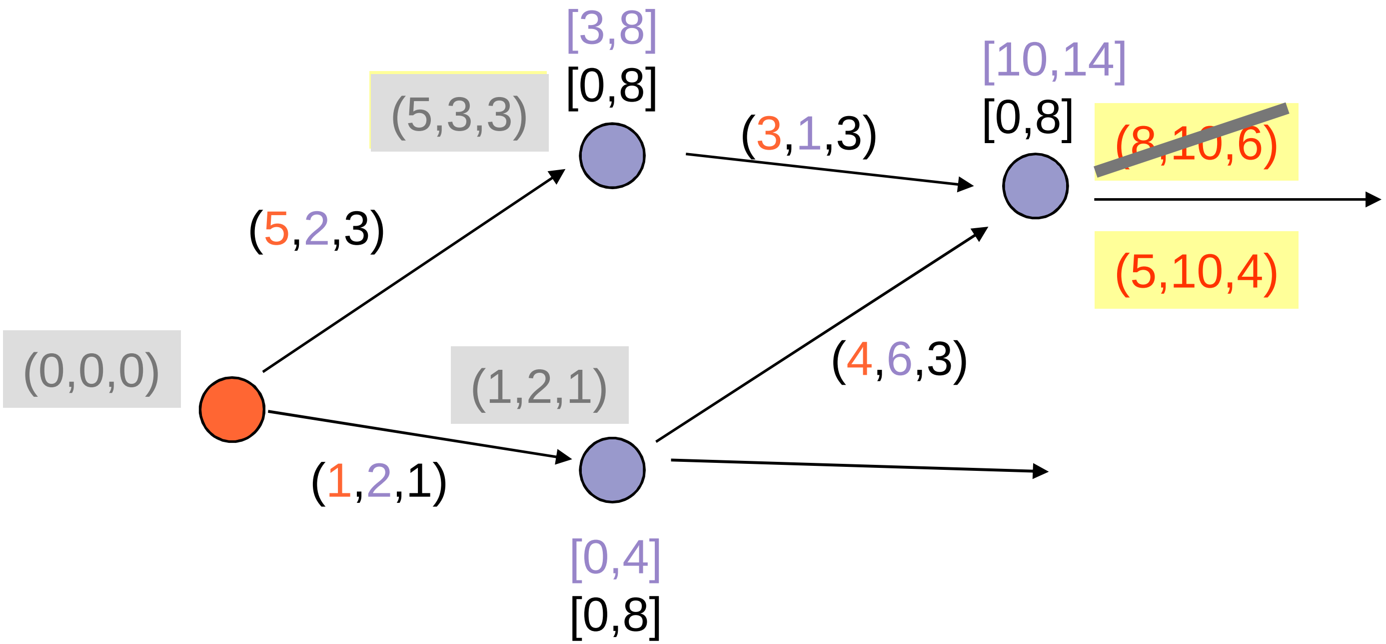
Sous-problème : ESPPRC

ESPPRC

- Contraintes de ressources
  - Ressource r = 1,…,R
  - Consommation t^r_{ij} pour tout arc (v_i,v_j)
  - Fenêtre $[a^r_i,b^r_i]$ pour tout sommet v_i
    - le niveau de consommation de la ressource ne peut pas dépasser b^r_i quand le sommet v_i est atteint
    - si le niveau de consommation de la ressource est inférieur à a^r_i quand le sommet v_i est atteint, alors il est mis à a^r_i

ESPPRC

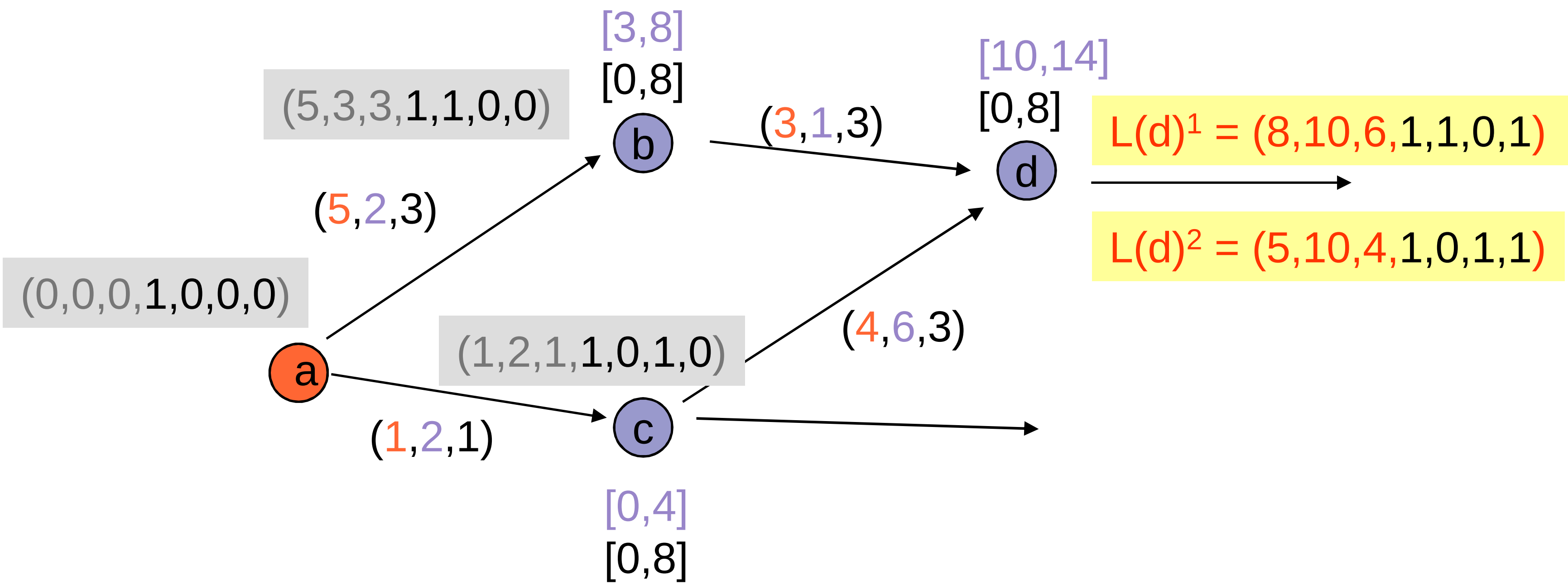
- Résolution du SPPRC : chemins non élémentaires (Desrochers 1988)



(coût, temps, charge)

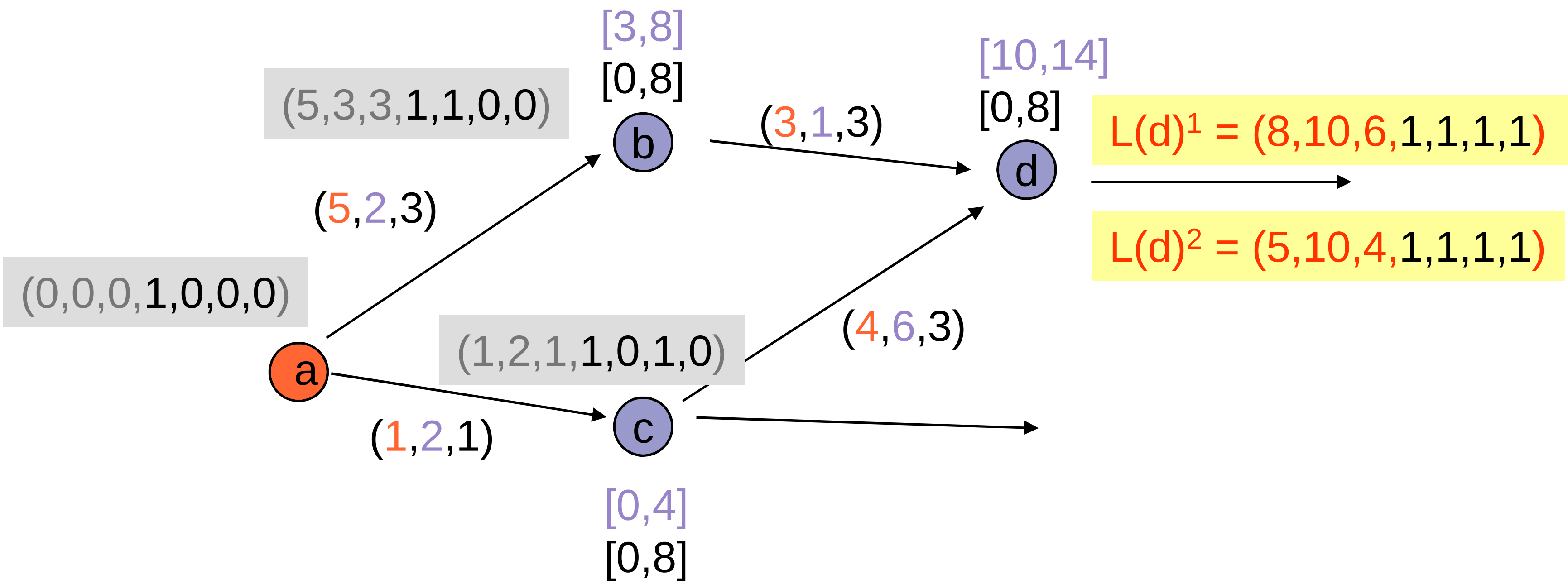
ESPPRC

- Elementary SPPRC : ajouter une ressource 0-1 par sommet
  - Indique si sommet visité ou non



ESPPRC

- Amélioration
  - Notion de sommet « non atteignable »
  - Règle d'extension
    - pour tous les sommets ne pouvant plus être atteints, la ressource est fixée à 1



ESPPRC

- Le nombre de ressources a un impact négatif fort sur le nombre de labels
  - Dominance plus difficile
- Mais les contraintes ont un impact positif fort sur le nombre de labels
  - Moins de labels réalisables

Qualité de la borne
Branch-and-cut-and-price

Qualité de la borne

- Rappel : le modèle 2 est obtenu du modèle 1 par décomposition de Dantzig-Wolfe

$$\text{minimize} \sum_{1 \le u \le U} \sum_{(v_i, v_j) \in A} c_{ij} x_{ij}^u \tag{1.1}$$

subject to

$$\sum_{1 \le u \le U} \sum_{\{v_j \in V | (v_i, v_j) \in A\}} x_{ij}^u \ge 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}), \tag{1.2}$$

$$\sum_{\{v_j \in V | (v_i, v_j) \in A\}} x_{ij}^u - \sum_{\{v_j \in V | (v_j, v_i) \in A\}} x_{ji}^u = 0 \qquad (v_i \in V, 1 \le u \le U), \tag{1.3}$$

$$\sum_{\{v_i \in V | (v_0, v_i) \in A\}} x_{0i}^u \le 1 \qquad (1 \le u \le U), \tag{1.4}$$

$$\sum_{(v_i, v_j) \in A} d_i x_{ij}^u \le Q \qquad (1 \le u \le U), \tag{1.5}$$

$$s_i^u + st_i + c_{ij} - s_j^u + M x_{ij}^u \le M \qquad ((v_i, v_j) \in A, v_j \ne v_0, 1 \le u \le U), \tag{1.6}$$

$$s_i^u + st_i + c_{i0} - b_0 + M x_{i0}^u \le M \qquad ((v_i, v_0) \in A, 1 \le u \le U), \tag{1.7}$$

$$a_i \le s_i^u \le b_i \qquad (v_i \in V, 1 \le u \le U), \tag{1.8}$$

$$x_{ij}^u \in \{0, 1\} \qquad ((v_i, v_j) \in A, 1 \le u \le U), \tag{1.9}$$

Minimiser les coûts de transport

Tous les clients doivent être servis

Ensemble de combinaisons d'au plus U routes réalisables (= Ω^U)

$$\text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega} c_k \theta_k$$

subject to

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} \theta_k \ge 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}),$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} \theta_k \le U,$$

$$\theta_k \subset \mathbb{N} \qquad (r_k \subset \Omega).$$

Qualité de la borne

- Le mécanisme de la génération de colonnes est très proche de la relaxation Lagrangienne

$$\text{minimize} \sum_{1 \le u \le U} \sum_{(v_i,v_j)\in A} c_{ij} x_{ij}^u \qquad (1.1)$$

subject to

$$\sum_{1 \le u \le U} \sum_{\{v_j \in V | (v_i,v_j)\in A\}} x_{ij}^u \ge 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}), \qquad (1.2)$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sum_{\{v_j \in V | (v_i,v_j)\in A\}} x_{ij}^u - \sum_{\{v_j \in V | (v_j,v_i)\in A\}} x_{ji}^u = 0 && (v_i \in V, 1 \le u \le U), && (1.3)\\
&\sum_{\{v_i \in V | (v_0,v_i)\in A\}} x_{0i}^u \le 1 && (1 \le u \le U), && (1.4)\\
&\sum_{(v_i,v_j)\in A} d_i x_{ij}^u \le Q && (1 \le u \le U), && (1.5)\\
&s_i^u + st_i + c_{ij} - s_j^u + M x_{ij}^u \le M && ((v_i,v_j)\in A, v_j \ne v_0, 1 \le u \le U), && (1.6)\\
&s_i^u + st_i + c_{i0} - b_0 + M x_{i0}^u \le M && ((v_i,v_0)\in A, 1 \le u \le U), && (1.7)\\
&a_i \le s_i^u \le b_i && (v_i \in V, 1 \le u \le U), && (1.8)\\
&x_{ij}^u \in \{0,1\} && ((v_i,v_j)\in A, 1 \le u \le U), && (1.9)
\end{aligned}}$$

Relaxer de manière Lagrangienne dans l'objectif (poids λ_i)

Résoudre sur cet ensemble de contrainte (ESPPRC)

- La résolution du dual Lagrangien revient à alterner calcul du vecteur Lagrangien λ et résolution de ESPPRC

Qualité de la borne

- On peut démontrer que la borne obtenue par génération de colonnes est égale à la borne fournie par le Dual Lagrangien
  - min $\{cx : A^1x \leq b^1, x \in \mathrm{conv}(Q)\}$
  - au lieu de min $\{cx : A^1x \leq b^1, A^2x \leq b^2 , x \geq 0\}$ pour le modèle 1

- La génération de colonnes n'améliore pas la borne si le sous-problème à la propriété d'intégralité

ESPPRC versus SPPRC

- Dans les premières implémentations de la génération de colonnes pour les problèmes de tournées, le sous-problème résolu était le SPPRC
- Principe
  - Ω est défini comme étant l'ensemble des routes vérifiant les contraintes de capacité et fenêtres de temps, sans limite sur le nombre de visite des clients
  - La solution optimale de ce nouveau problème reste la même
    - A l'optimum un client ne sera pas visité deux fois

ESPPRC versus SPPRC

- Nouveau modèle :
  - a_{ik} = nombre de passages de la route r_k chez le client v_i

$$\text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega} c_k \theta_k$$

subject to

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} \theta_k \geq 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}),$$

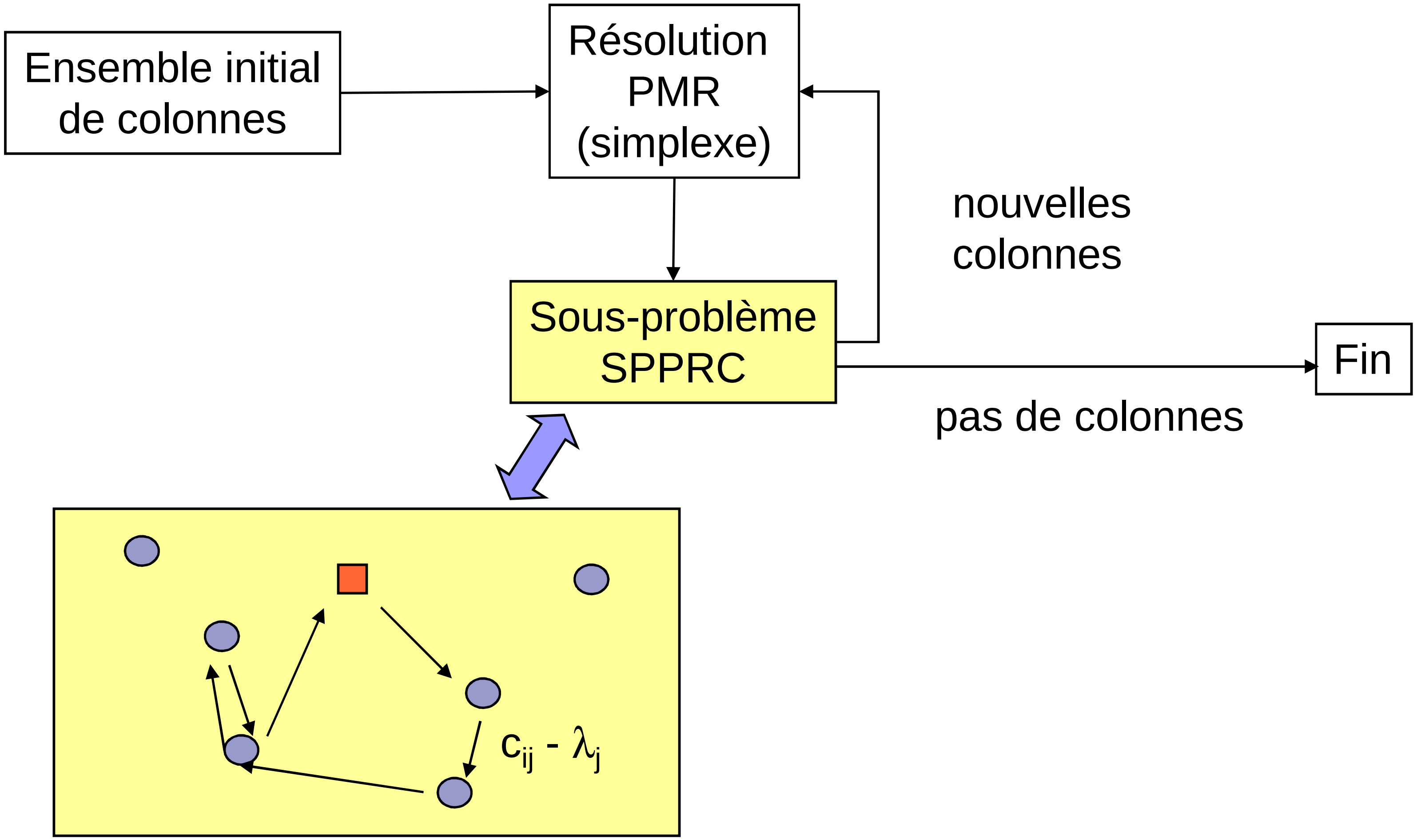
$$\sum_{r_k \in \Omega} \theta_k \leq U,$$

$$\theta_k \in \mathbb{N} \qquad (r_k \in \Omega).$$

- Coût réduit d'une variable : $c_k - \sum_{v_i \in V \setminus \{v_0\}} a_i^k \lambda_i - \lambda_0$

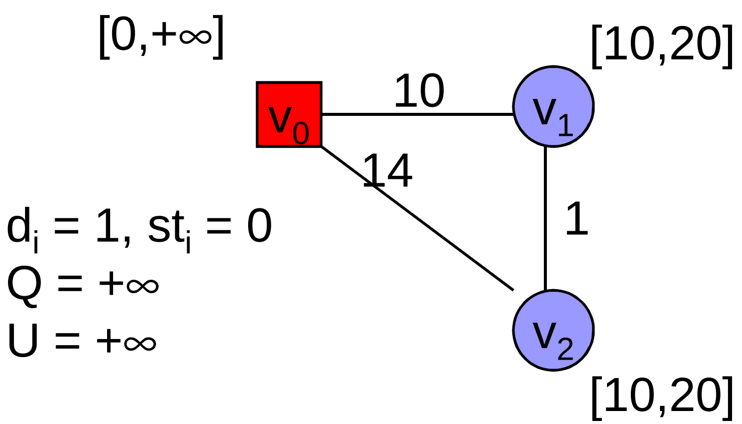
ESPPRC versus SPPRC

- Algorithme



ESPPRC versus SPPRC

- Impact
  - SSPRC seulement NP-dur au sens faible
  - Résolution par programmation dynamique beaucoup plus efficace
    - Espace des solutions plus grand (pas beaucoup plus si les TW sont relativement serrées)
    - Mais… dominance beaucoup plus efficace (2 ressources dans le cas du VRPTW)
  - Borne obtenue de moins bonne qualité (parfois sensiblement)



Solution relaxé de coût 6,6 :

route ($v_0,v_1,v_2,v_1,v_2, v_1,v_2,v_1,v_2,v_1,v_2,v_0$), de coût 33 avec un coefficient 0,2

ESPPRC versus SPPRC

- Approches les plus efficaces : compromis
  - SSPRC sans 2-cycle : guère plus long à résoudre
  - SPPRC sans k-cycle : multiplie par O(k!) le nombre de labels
    - raisonnable pour k = 3 ou 4
    - borne presque équivalente à celle obtenue avec l'ESPPRC si les ressources empêchent des cycles trop longs
    - Irnich et Villeneuve (2003)
  - SPPRC avec contrainte d'élémentarité pour des sommets choisis dynamiquement
    - borne presque équivalente à celle obtenue avec l'ESPPRC si les sommets sont bien choisis
    - Desaulniers et al. (2006)
  - ESSPRC avec ajout dynamique des contraintes d'élémentarité
    - Si le sous-problème ne retourne que des tournées avec des cycles, une contrainte est ajoutée et le sous-problème rappelé
    - Dumitrescu et Boland (2006), Righini et Salani (2005)

Branch-and-cut-and-price

- La génération de coupes en complément de la génération de colonnes devient de plus en plus incontournable

- N'importe quelle inégalité valide pour la formulation compacte, peut être reformulée

- …mais les coupes doivent être compatibles avec la structure du sous-problème
  - prise en compte des nouvelles variables duales « efficace »

Branch-and-cut-and-price

- k-path cuts (Kohl et al. 1999)
  - Trouver un ensemble S de sommets tels que dans la solution relaxée courante
    - le flot entrant dans S est strictement inférieur à k
    - du fait de leur demande, les sommets de S nécessitent au moins k véhicules
  - Ajouter la coupe : $$\sum_{v_i \in V \setminus S} \sum_{v_j \in S} x_{ij} \geq k$$

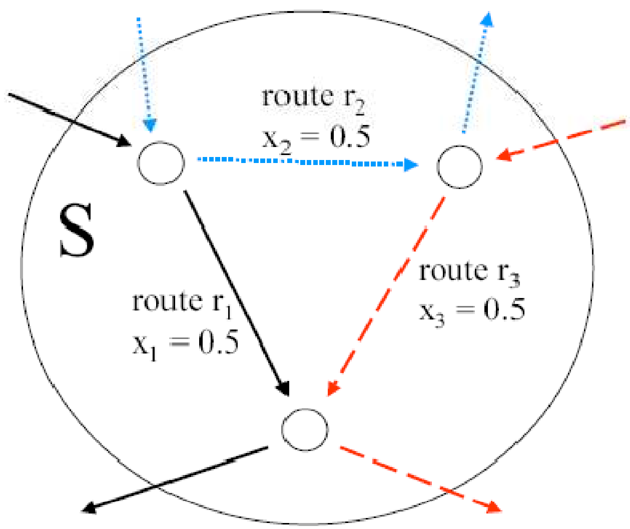
    c'est à dire

    $$\sum_{r_k \in \Omega_1} \sum_{v_i \in V \setminus S} \sum_{v_j \in S} b_{ij}^k \theta_k \geq k$$
  - Il suffit ensuite de prendre en compte la nouvelle variable duale dans le sous-problème lorsque un arc entrant dans S est traversé

Branch-and-cut-and-price

- k-path cuts (Kohl et al. 1999)
  - Efficace pour k=2
  - Pour k>2, l'algorithme de séparation de la coupe est trop long…

- Exemple



$d_i = 5$
$Q = 10$

Branch-and-cut-and-price

- Coupes du polytope de Set-Partitioning

$$\text{minimize} \sum_{r_k \in \Omega} c_k \theta_k$$

subject to

$$\sum_{r_k \in \Omega} a_{ik} \theta_k = 1 \qquad (v_i \in V \setminus \{v_0\}),$$

$$\sum_{r_k \in \Omega} \theta_k \leq U,$$

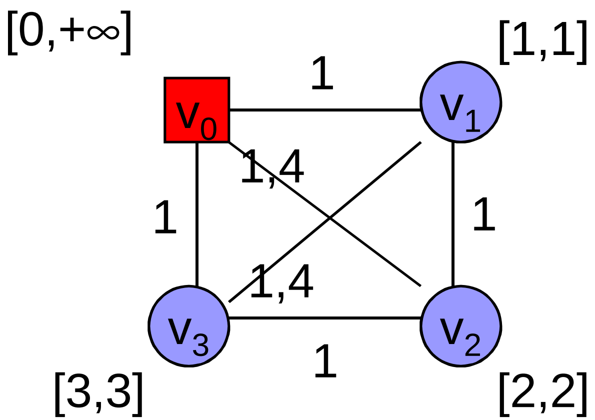
$$\theta_k \in \mathbb{N} \qquad (r_k \in \Omega).$$

  - inégalités de cliques, inégalités de Chvatal-Gomory…

Quelques points d’implémentation

Ensemble initial de colonnes

- Initialiser Ω_1 avec les routes de la solution (relaxée) optimale n'empêche la génération de nouvelles colonnes



$d_i = 1$, $st_i = 0$
$Q = +\infty$
$U = +\infty$

$\Omega_1 = \{r_5\}$ avec $r_5 = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$

Min $4x_5$
sujet à

$$\begin{cases} x_5 \geq 1 \\ x_5 \geq 1 \\ x_5 \geq 1 \\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Max $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
sujet à

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 4 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale (coût = 4)
$x=(1)$; $\lambda=(4; 0; 0)$ par exemple

La route (v_0,v_1,v_0) a un coût réduit négatif :
coût réduit = 2 – 4 = -2

Ensemble initial de colonnes

- Un bon ensemble initial de colonnes est un ensemble qui permet de restreindre les variables duales autour de leur valeur optimale…

- Souvent, par simplicité, l'ensemble initial utilisé est l'ensemble des aller-retours directs :
  - $\Omega_1 = \{ (v_0,v_1,v_0) , \ldots , (v_0,v_n,v_0) \}$
  - Ceci pose des difficultés si le nombre de véhicules est limité…
  - Une heuristique simple (style *Clarke and Wright*) peut suffire à obtenir une solution réalisable

Problèmes d'infaisabilité

- Possibilité 1
  - Commencer par aborder le problème de minimisation du nombre de véhicules
    - revient à relaxer la contrainte sur le nombre de véhicules et à définir $c_k = 1$, $c_{0i} = 1$ et $c_{ij}=0$ pour $v_i \neq v_0$
    - stopper dès que la solution courante est inférieure ou égale à U

- Possibilité 2
  - Introduire une ou des routes fictives
  - Exemple : une route fictive unique servant tous les clients à un coût élevé
    - si ce coût est strictement supérieur à celui de la solution optimale le modèle reste valide

- Remarque : des problèmes d'infaisabilité peuvent se poser pour la première résolution du PMR à la racine, mais aussi à chaque nœud de l'arbre…

Résolution du sous-problème

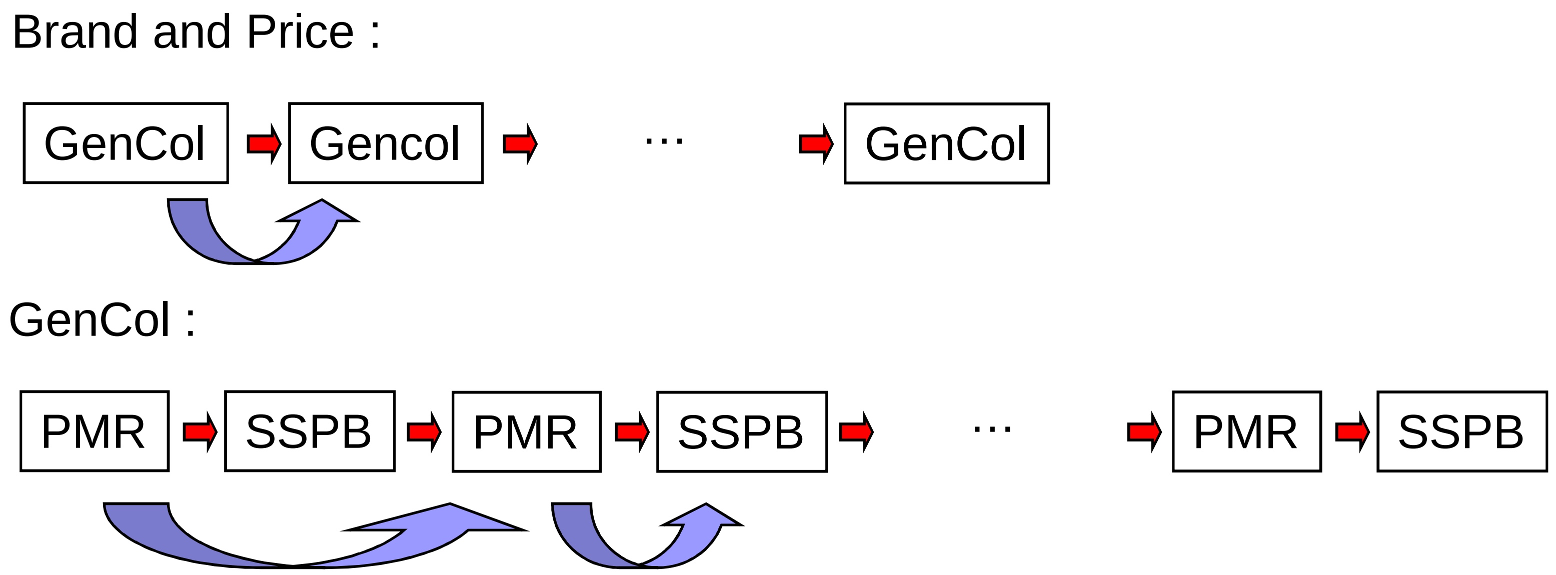
- Remonter plusieurs routes de coût négatif
  - Programmation dynamique bien adaptée pour ça
  - Compromis à trouver : réduire le nombre d'itérations / limiter la taille du PMR

- Tronquer la résolution
  - Le but réel n'est pas de trouver la route de coût minimum mais de trouver une (des) route(s) de coût négatif !
  - Compromis à trouver : limiter les temps de calcul du sous-problème / remonter des routes attractives

- Commencer par une résolution heuristique du sous-problème :
  - Recherche tabou…
  - Programmation dynamique heuristique
    - limiter les extensions
    - agréger les ressources
    - renforcer la dominance…

Implémentation

- Le Branch and Price est un processus itératif
  - Le travail réalisé aux itérations précédentes peut être utilisé



Implémentation

- Relation GenCol ⇨ Gencol :
  - L’ensemble de colonnes initial utilisé est généralement celui obtenu en fin de calcul précédent
  - Dans certains cas, cela nécessite de supprimer des colonnes du modèle pour limiter le temps de résolution du PMR
    - dans le cas des problèmes de tournées c’est généralement inutile, le temps de résolution du PMR est négligeable par rapport à celui du sous-problème
    - ce n’est plus le cas par exemple quand les horaires des tâches sont fixées (affectation de flotte aux vols pour le transport aérien…)
    - il suffit de supprimer des colonnes dont le coût réduit est « élevé » depuis plusieurs itérations (au pire certaines seront regénérées…)

Implémentation

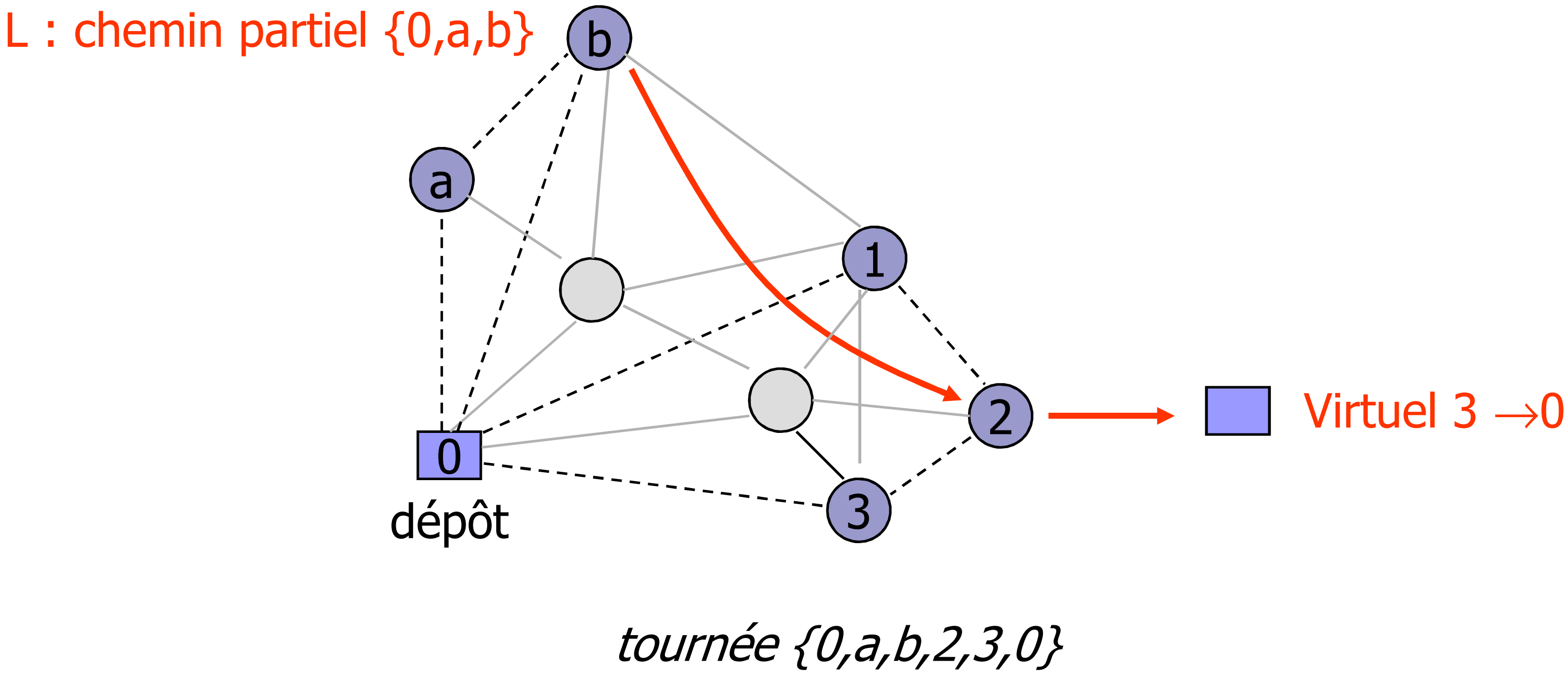
- Relation $\boxed{\text{PMR}} \Rightarrow \boxed{\text{SSPB}} \Rightarrow \boxed{\text{PMR}}$:
  - Le nouveau programme linéaire à résoudre est le même que le précédent avec une ou plusieurs variables supplémentaires
  - La solution de base précédente reste réalisable
  - Quand le temps de résolution du PMR est long (encore une fois ce n’est que rarement le cas dans notre contexte), il peut être important de repartir de cette solution de base

Implémentation

- Relation PMR ⇨ SSPB :
  - Les variables de base du PMR sont des chemins de coût nul dans le graphe du sous-problème (c'est également vrai pour toutes les variables de coût réduit nul du PMR)
  - Ces informations peuvent être utilisées par le sous-problème
    - soit dans un algorithme de recherche locale
    - soit dans le cadre de la programmation dynamique
      - insérer des labels correspondant à ces débuts de chemins
      - insérer des dépôts fictifs correspondant à ces fins de chemins
      - Feillet, Gendreau, Rousseau (2008)

Implémentation

- Feillet, Gendreau, Rousseau (2008)
  - Meta-extend et Label-loading

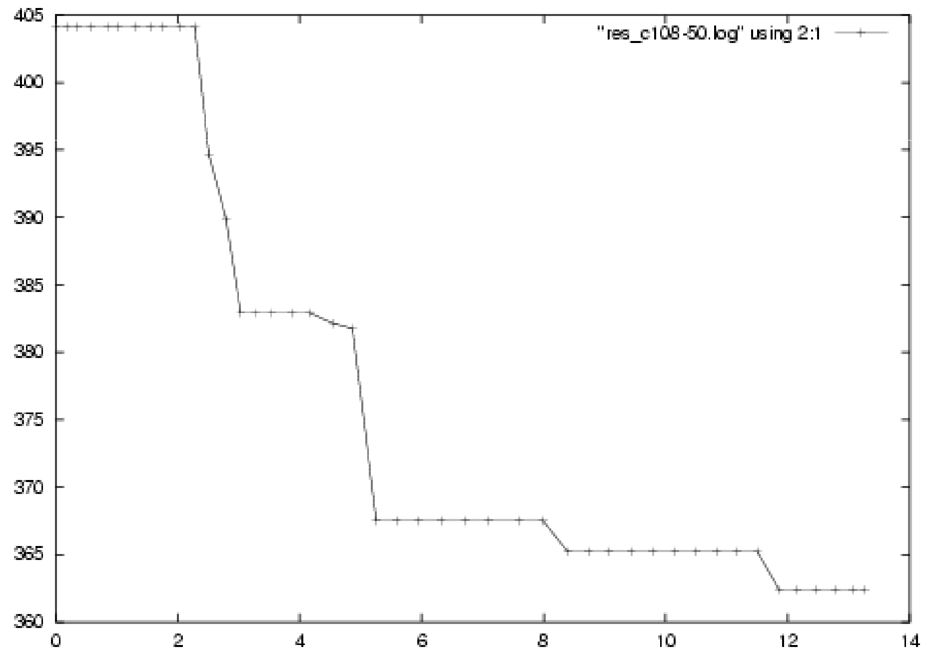


  - Revient à une recherche locale générique autour des chemins de la base

Stabilisation

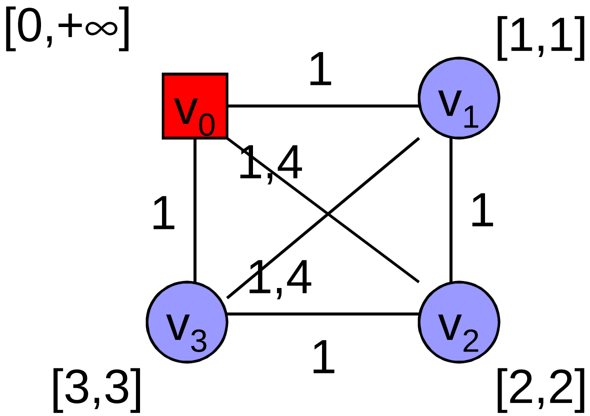
Problèmes de dégénérescence

- Exemple d’évolution de la relaxation linéaire du problème maître restreint au cours du temps



Illustration

- Retour sur la dernière itération de l'exemple (itération 3)



$d_i = 1$, $st_i = 0$
$Q = +\infty$
$U = +\infty$

$\Omega_1 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ avec $r_5 = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$

Min $2\theta_1 + 2{,}8\theta_2 + 2\theta_3 + 3{,}4\theta_4$ **$+4\theta_5$**
sujet à

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_4 + \boldsymbol{\theta_5} \geq 1 \\ \theta_2 + \theta_4 + \boldsymbol{\theta_5} \geq 1 \\ \theta_3 + \boldsymbol{\theta_5} \geq 1 \\ \theta_1, \ldots, \theta_3, \theta_4, \boldsymbol{\theta_5} \geq 0 \end{cases}$$

Max $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
sujet à

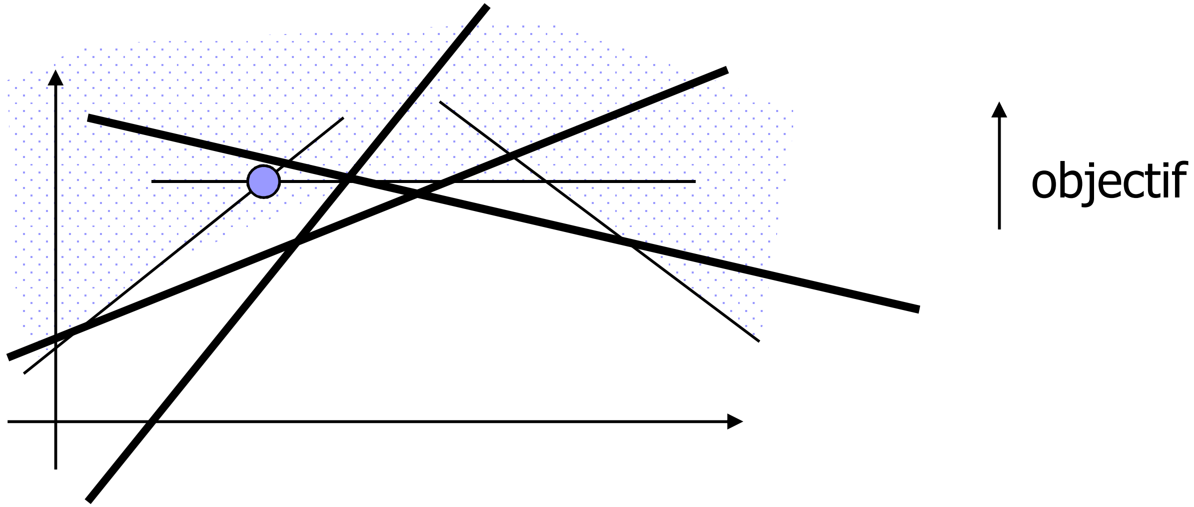
$$\begin{cases} \lambda_1 \leq 2 \\ \lambda_2 \leq 2{,}8 \\ \lambda_3 \leq 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 3{,}4 \\ \boldsymbol{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 4} \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale (coût = 4)
$\theta = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1)$
$\lambda = (2;\ 0;\ 2)$ par exemple

Par exemple, (v_0, v_1, v_3, v_0) de coût réduit négatif :
coût réduit = 3,4 - 2 - 2 = -0,6

Problèmes de dégénérescence en génération de colonnes

- Méthode de stabilisation en génération de colonnes
  - A une itération donné, l'espace dual optimal du problème maître restreint est souvent de dimension non nulle (non réduit à un point)



  - Les coupes générées ne permettent pas forcément de couper toutes les solutions duales optimales

Revue de la littérature

- BoxStep (Marsten et al. 1975)
  - définir une boîte autour des valeurs duales obtenues à l'itération précédente
  - limiter l'espace dual réalisable à cette boîte

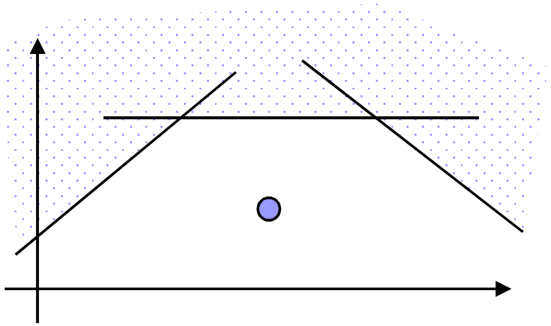
- Méthode de pénalité (Kim et al. 1995)
  - pénaliser l'écart avec les valeurs duales obtenues à l'itération précédente

Revue de la littérature

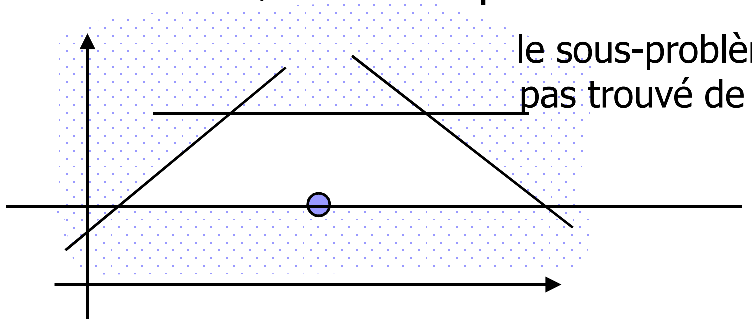
- Stabilisation de du Merle et al. (1999)
  - Combinaison des deux méthodes précédentes
    - pénalité lorsqu'on sort de la boite
  - Ingrédients
    - choix de la boite de départ
    - paramètres dynamiques : largeur de la boite, coefficients de pénalisation

Revue de la littérature

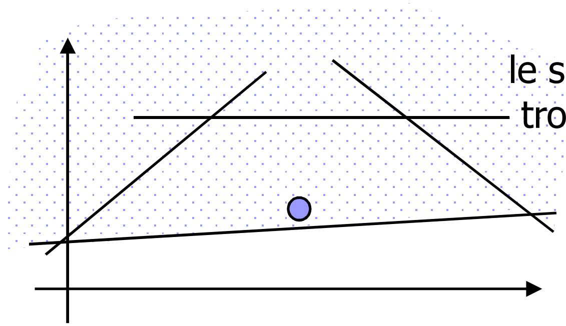
- Analytic Center Cutting Plane Method (Goffin et al.)
  - A chaque itération on calcule (approximativement) le centre analytique de l’espace dual
    - si la solution obtenue est duale réalisable , on restreint l’espace dual aux solutions de coût supérieur et on recommence
    - si la solution obtenue est duale irréalisable, on la coupe et on recommence



objectif



le sous-problème n’a pas trouvé de coupe



le sous-problème a trouvé une coupe

Stabilisation par point intérieur

- Principe (Rousseau et al. 2007)
  - Calculer plusieurs points de l ’espace dual optimal et prendre leur barycentre
    - limiter les oscillations des variables duales
    - augmenter l’adéquation entre valeur de la variable dual et coût marginal du sommet
    - aider à ce que chaque colonne remontée coupe une part importante de l’espace dual optimal