L3 INFO A3INF23
PROBABILITÉS ET PROCESSUS STOCHASTIQUES
TRAVAUX DIRIGÉS
Brice Mayag

FEUILLE 2 : LES CHAÎNES DE MARKOV

Exercice 1 :

Une chaîne de Markov homogène $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à 3 états $\{a, b, c\}$ a pour matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & \beta & 0.8 \\ 0.5 & 0.2 & \delta \end{pmatrix}$$

L'ordre des ligne et colonnes dans P est a, b, c.

1. Donnez les valeurs de α, β et δ. Représentez le graphe de cette chaîne.
2. A partir de ce graphe, calculez $P(X_3 = a|X_0 = b)$ et $P(X_7 = c|X_4 = a)$.
3. Vérifiez ces résultats en calculant P^3.
4. Cette chaîne admet-elle une loi invariante ?

Exercice 2 :

On considère une chaîne de Markov homogène à 3 états, dont la matrice de transition est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le graphe de cette chaîne de Markov.
2. Les états de cette chaîne de Markov sont-ils récurrents ? transitoire ? la chaîne est-elle irréductible ?
3. Calculer P^2, P^3 et plus généralement P^n
4. Déterminer la loi invariante de la chaîne.

Exercice 3 : La grande école

Les études dans une grande école durent 3 ans. A la fin de chaque année d'étude, tout élève a une probabilité p de passer dans l'année supérieure (ou d'obtenir un diplôme s'il est en troisième année), une probabilité q de redoubler et une probabilité π d'être renvoyé ou d'abandonner (avec $p + q + \pi = 1$).

1. Justifiez la représentation de ce processus par une chaîne de Markov et tracez le graphe de cette chaîne.
2. Donnez sa matrice de transition.
3. Analysez les états de cette chaîne.

Exercice 4 : La sentinelle du fort carré

On considère un fort carré à sa base, pourvu d'une porte de garde à chaque coin. Pour tromper l'ennemi, on donne l'ordre à la sentinelle de faire sa ronde de la façon suivante :

Monter une garde une minute à l'un des 4 postes qui est choisi au dernier moment par le commandement ; puis tirer à pile ou face : si pile tombe, aller au premier poste rencontré sur sa gauche, sinon aller au premier poste rencontré sur sa droite ; y monter la garde une minute ; tirer à nouveau à pile ou face et suivre la même règle que précédemment.

1. Justifiez que ce processus peut être représenté par une chaîne de Markov et représentez le graphe de cette chaîne.
2. Analysez les états de la chaîne et donnez la matrice de transition.
3. Donnez la distribution invariante.

Exercice 5 :

Doudou, le hamster paresseux, ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire.

- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatigant ; il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué.

1. Donner la matrice de transition de la chaîne $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui représente l'activité du hamster.
2. Caractériser les états de cette chaîne.

Exercice 6 :

On considère la séquence ADN suivante :

$$AGGCGTGAAGGTTCCCCAAAATTTTTGGGCCCAAAAACCCTTGGGGGGGCCCCC$$

On suppose que cette séquence peut être modélisée par une chaîne de Markov $\{X_i\}_{1\leq i\leq 54}$ dont l'ensemble des états est $E = \{A, G, C, T\}$.

1. A partir de cette séquence, construire la matrice de transition de $\{X_i\}_{1\leq i\leq 54}$ la plus vraisemblable et donner son graphe représentatif.
2. Donner une estimation de la loi invariante par deux méthodes.

Exercice 7 :

Une étude sur les pics de pollution en été en région parisienne a permis de voir que
– le lendemain d'un jour "pic de pollution" est un jour "ordinaire" dans 76% des cas ;
– le lendemain d'un jour "ordinaire" est un jour à "pic de pollution" dans 17% des cas.

1. On admet que l'hypothèse de Markov peut être appliquée. Donnez la matrice de transition et le graphe associé de cette chaîne.
2. Sachant que le 1er août était un jour à "pic de pollution", quelle est la probabilité pour que le 3 août de cette même année le soit également ?
3. Quelle est la durée moyenne d'un pic de pollution ? Quelle est la durée moyenne d'une situation "ordinaire" ?

Exercice 8 :

On considère deux joueurs A et B jouant à pile ou face, avec une pièce truquée (probabilité p pour pile et $q = 1 - p$ pour face), et une fortune globale de S euros. A chaque étape du jeu, si A gagne (par exemple pile), B lui donne un euro ; dans le cas contraire il donne un euro à B. Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs est ruiné.

1. En définissant les états de ce processus par la fortune de A $(0, 1, 2, \dots, S)$, représentez la chaîne de Markov associée à ce processus. Est-elle irréductible ? justifiez votre réponse.
2. En notant $\pi_{i,a}$ la probabilité que A gagne sachant qu'il débute avec i euros, donnez une équation de récurrence reliant $\pi_{i,a}$, $\pi_{i-1,a}$ et $\pi_{i+1,a}$.

Exercice 9 : (Examen Janvier 2014)

On considère la matrice Q de taille 7×7 suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 2/5 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8/9 & 0 & 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 & 8/9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \geq 0$.

1. Pour quelle valeur de α, Q est-t-elle une matrice stochastique ?
2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov associée à la matrice de transition Q, pour la valeur de α trouvée à la question précédente. Dessiner le graphe de $(X_n)_{n\geq 0}$ en précisant les probabilités de transition entre les différents états.
3. Analysez les états de cette chaîne de Markov (état transitoire ou récurrent). Cette chaîne est-elle irréductible ?
4. Calculer les probabilités suivantes $P(X_5 = 3|X_3 = 1)$, $P(X_7 = 4|X_5 = 7)$ et $P(X_{10} = 5|X_8 = 5)$.

Exercice 10 : (Examen Janvier 2013)

Une grenouille se déplace toutes les minutes sur une échelle qui a 4 barreaux dans un bocal. Elle démarre sur le fond du bocal et se déplace ainsi :

- quand elle est au sol elle monte sur le premier barreau,

- quand elle est sur le quatrième barreau elle y reste,
- quand elle est sur les autres barreaux il y a une chance sur deux qu'elle monte d'un barreau, et une chance sur deux qu'elle descende d'un barreau.

Soit X_n la variable aléatoire qui indique la position de la grenouille (le sol sera la position 0) à la $n^{\text{ème}}$ minute.

1. Donner la définition d'une chaîne de Markov homogène.
2. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont on donnera les états et la matrice de transition.
3. Donner le graphe associé à cette chaîne de Markov et analyser ses états (transitoire, récurrent ou absorbant).
4. Déterminer la loi invariante associée à cette chaîne de Markov.